

## **TP sur la formation des images**

**Responsables :** Gérard Rousset et Frédéric Cassaing

[gerard.rousset@obspm.fr](mailto:gerard.rousset@obspm.fr), tél. 01 45 07 75 49 (à l'ONERA : 01 467 347 37)

[frederic.cassaing@onera.fr](mailto:frederic.cassaing@onera.fr), tél. 01 467 348 54

Fax Observatoire : 01 45 07 79 17

Fax ONERA : 01 46 73 41 71

### **Lieu du déroulement du TP :**

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA)

29 Avenue de la Division Leclerc

BP 72

92322 Châtillon Cedex

**Durée :** 1 journée

### **Résumé :**

L'enregistrement d'images est une des techniques les plus répandues dans le domaine de l'observation astronomique et spatiale pour acquérir des informations précieuses sur les objets d'intérêt à étudier. Ces images sont décrites à partir des principes physiques de l'optique dite de Fourier que nous proposons de mettre en évidence dans ce TP.

Un banc modulaire installé à l'ONERA permettra de réaliser plusieurs expérimentations qui devront être analysées par les étudiants.

Dans un premier temps, il s'agit d'étudier la fonction d'étalement de point (FEP) (ou encore réponse impulsionnelle) d'un système optique imageur obtenue à partir d'un point source : dans le cas parfait de la diffraction et en introduisant des dégradations par des aberrations simples. La fonction de transfert du système optique pourra aussi être calculée et analysée à partir de la FEP. Tout d'abord, on passera en revue plusieurs formes de diaphragme pupillaire afin de comprendre les propriétés de la diffraction qui lient plan image et plan pupille. Les lois de comportement simples seront déduites en analysant les cas particuliers de la tache d'Airy et des franges d'Young. On introduira ensuite des aberrations simples, comme une défocalisation, afin d'étudier les dégradations induites sur la FEP du système.

Dans un deuxième temps, des images simulant un objet étendu seront produites pour mettre en évidence et analyser la relation de convolution de l'objet par la FEP du système décrivant la formation des images, à partir de différents diaphragmes pupillaires.

## Formation des images

L'objet de ce TP est d'utiliser un banc optique modulaire permettant d'illustrer l'influence des paramètres clefs d'un instrument optique sur la formation des images et de l'interpréter comme décrite par un système linéaire.

### Principes :

Du fait de la linéarité de l'équation de propagation des ondes lumineuses dans la plupart des milieux (dit linéaires), le processus de formation d'une image peut être interprété comme une opération linéaire. Donc un instrument d'optique peut être décrit par la théorie des systèmes linéaires. Si le système est invariant par translation, on peut introduire et utiliser les notions de réponse impulsionnelle et de fonction de transfert (transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle). La réponse impulsionnelle est la réponse du système à une impulsion, appelée aussi « Dirac ». Alors la réponse du système à un signal d'entrée quelconque est donnée par le produit de convolution de ce signal par la réponse impulsionnelle. Dans l'espace de Fourier, la transformée de Fourier du signal d'entrée (son spectre) est simplement multipliée par la fonction transfert du système, c'est-à-dire filtré par un filtre passe bas dans le cas de l'optique, pour donner le spectre de la réponse.

Pour former l'image d'un objet, nous allons utiliser une lentille (ou un jeu de lentilles) qui permet de conjuguer le plan d'observation avec l'objet. Dans ce plan d'observation la distribution d'intensité lumineuse est appelée image et est enregistrée par une caméra équipée d'une matrice de détecteurs bidimensionnelle (appelée CCD). L'image est ensuite visualisée sur un écran vidéo et peut être numérisée sur un PC.

Un objet peut être interprété comme étant la somme d'une infinité de points sources, la lentille image chaque point dans le plan d'observation (voir Figure 1). L'image de l'objet est donc la superposition des images individuelles de tous les points de l'objet. Si l'image de chaque point, normalisée de l'intensité émise en ce point, est identique quel que soit le point, on dit que le système optique est « linéaire invariant par translation » (isoplanétique pour les opticiens), c'est-à-dire que l'image est donnée par la convolution de la distribution d'intensité dans l'objet par l'image d'un point. L'image d'un point est appelée « réponse impulsionnelle » du système optique linéaire. Dans l'interprétation de l'optique géométrique si le système n'a pas d'aberrations, l'image d'un point est un point. Cependant dans bien des cas et toujours sans aberration, il faut tenir compte des effets dus à la diffraction, et donc la réponse impulsionnelle n'est plus un point mais une fonction bidimensionnelle de largeur non nulle dont nous allons étudier le comportement. Cette réponse impulsionnelle est appelée aussi « fonction d'étalement de point » (FEP) par les opticiens, ou « point spread function » (PSF) en anglais. Une image optique peut ainsi être décrite comme le produit de convolution de la répartition d'intensité de l'objet par la FEP du système optique. L'image alors obtenue est une version « lissée » de la distribution d'intensité dans l'objet, il s'agit du filtrage des hautes fréquences spatiales de l'objet par le système optique linéaire. La notion de fonction de transfert associée à la réponse impulsionnelle sera donc aussi utile pour l'interprétation des images dans le domaine des fréquences spatiales.

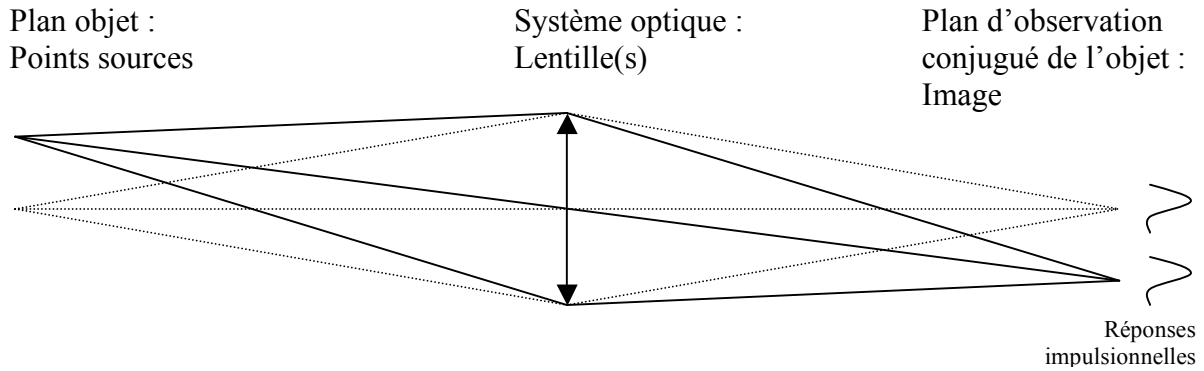


Figure 1 : principe de la formation de l'image d'un objet par un système optique

Dans le cas où un point source unique est utilisé comme objet, on enregistre donc la FEP du système optique. Cette FEP est caractérisée par la taille et la forme des faisceaux optiques entrant dans le système mais aussi par la présence ou non d'aberrations optiques dans le système.

**Première expérimentation à réaliser**  
**Cas de l'imagerie d'un point source sans aberration.**

**Objectif**

Nous considérons tout d'abord un système optique parfait sans aberration (sans perturbation des ondes optiques). La FEP va être directement déterminée par la forme du diaphragme définissant la taille du faisceau optique, appelé « pupille » du système. Une propriété importante des lentilles est de pouvoir réaliser une transformation de Fourier entre le champ électromagnétique dans le plan pupille et le champ projeté dans le plan focal. Le champ ainsi projeté à distance finie par la lentille est donné par l'approximation de Fraunhofer de la diffraction du champ dans la pupille, décrivant le résultat de sa propagation entre le plan pupille et le plan focal à travers le système optique (voir Figure 2).

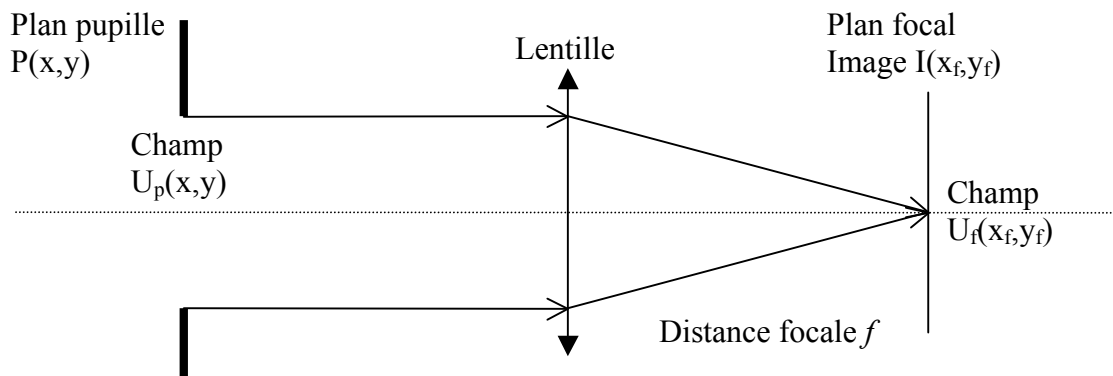


Figure 2 : Schéma de principe permettant le calcul de la diffraction de Fraunhofer donnée par une lentille.

On se place en lumière monochromatique,  $\lambda$  est la longueur d'onde. Soit  $P(x,y)$  la fonction pupillaire donnant la forme du faisceau optique transmis par le diaphragme avant la lentille :

$P(x,y) = 1$  à l'intérieur de l'ouverture, 0 ailleurs.

L'amplitude du champ dans la pupille s'écrit pour une onde plane incidente d'amplitude unité (point source à l'infini dans l'espace d'entrée de la lentille) :

$$U_p(x,y) = P(x,y)$$

L'amplitude du champ dans le plan focal s'écrit alors :

$$U_f(x_f, y_f) \propto TF(U_p(x, y))$$

$$U_f(x_f, y_f) \propto \iint_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda f} (xx_f + yy_f)\right] dx dy$$

où  $f$  est la distance focale.

L'intensité lumineuse enregistrée est donnée par le module carré du champ électromagnétique dans le plan d'observation. On a donc :

$$I(x_f, y_f) \propto \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda f} (xx_f + yy_f)\right] dx dy \right|^2$$

L'image représente la figure de diffraction de Fraunhofer de la pupille du système  $P(x,y)$ .

Dans la cas d'une pupille circulaire, l'image d'un point source est la tache d'Airy donnée par :

$$I(x_f, y_f) \propto \left[ \frac{2J_1(\pi dr/\lambda f)}{\pi dr/\lambda f} \right]^2$$

où  $d$  est le diamètre de la pupille et  $r$  le module du vecteur position dans le plan d'observation. On note que la largeur de la tache d'Airy est directement reliée au diamètre de la pupille, à la longueur d'onde et à la focale de l'instrument. Sur la Figure 3 est présentée une coupe de  $I(x,y)$ . Le premier anneau noir est à une position :  $r = 1,22\lambda f/d$

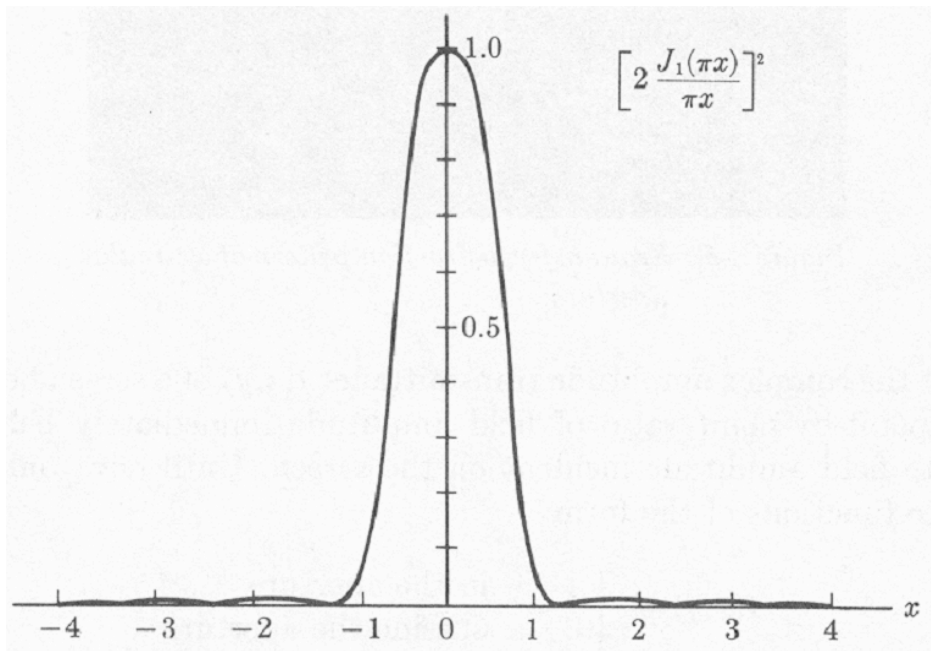


Figure 3 : coupe de la tache d'Airy, la FEP d'une pupille circulaire.

La fonction de transfert du système est la transformée de Fourier de  $I(x,y)$  (FEP). Par les propriétés de la transformée de Fourier, c'est aussi l'autocorrélation de  $P(x,y)$ .

### Moyen

Le banc est équipé : d'un trou source éclairé par un laser ( $\lambda = 0,65 \mu\text{m}$ ), simulant un point source, au foyer d'une lentille (focale 1 m), d'un diaphragme pupillaire ajustable sur le trajet en faisceau parallèle, de lames séparatrices permettant d'utiliser différentes surfaces réfléchissantes, d'une lentille permettant de former l'image (focale  $f = 0,50 \text{ m}$ ) et d'une

caméra équipée d'un objectif de microscope de grandissement 10 (caméra de 384x288 pixels de pas physique 22  $\mu\text{m}$ , numérisée sur 768x576 points).

**Traitement des images** : on peut enregistrer les images sur un PC, et par un code idl disponible calculer leur transformée de Fourier et des coupes x ou y pour en faire une analyse quantitative.

### Travail à réaliser

- à partir des explications données en début de séance, comprendre le banc optique en faisant un schéma de principe et reporter les dimensions utiles pour interpréter les images.
- pour une taille donnée de diaphragme pupillaire, observer la tache d'Airy, comparer la valeur de sa largeur mesurée sur la coupe de l'image et à celle calculée à partir des dimensions physiques données ci-dessus.
- faire varier la taille du diaphragme et interpréter les variations observées de la largeur de la tache d'Airy et de la largeur de la fonction de transfert associée, en traçant des courbes en fonction de la taille de la pupille.
- mettre le diaphragme carré et interpréter l'image sachant que la transformée de Fourier d'une fonction porte bidimensionnelle de largeur d est proportionnelle à :
$$\frac{\sin(\pi dx/\lambda f)}{\pi dx/\lambda f} \frac{\sin(\pi dy/\lambda f)}{\pi dy/\lambda f}$$
- mettre un diaphragme à deux trous circulaires : interpréter l'image, pourquoi voit-on des franges ? Calculer et interpréter la fonction de transfert associée.
- changer de type de masque et confirmer l'interprétation.

### Deuxième expérimentation à réaliser

#### Cas de l'imagerie d'un point source avec aberrations optiques.

#### Objectif

La section précédente supposait le système optique parfaitement **stigmatique**, c'est-à-dire tel que le point image A' est parfaitement conjugué du point objet A (Figure 4). Ceci peut s'illustrer de deux manières :

- interprétation corpusculaire : tous les **rayons** issus de A convergent exactement en A'.
- interprétation ondulatoire : la **surface d'onde** sphérique  $\Sigma_0$  qui diverge de A se transforme en une surface d'onde sphérique  $\Sigma'_0$  qui converge en A'.

Ces deux interprétations sont équivalentes car les rayons lumineux sont orthogonaux à la surface d'onde. Les surfaces stigmatiques les plus fréquemment utilisées sont :

- le miroir plan (stigmatique pour tout point de l'espace)
- les coniques (stigmatiques en leurs foyers) : parabole, ellipse (cercle), hyperbole

Dans la très grande majorité des systèmes, le stigmatisme n'est pas parfait. On dit que le système présente des **aberrations** (Figure 4). L'image de A n'est alors plus un point A' mais une tache résultant des points d'intersection A'\_i de tous les rayons avec le plan focal. Les sources d'aberration sont nombreuses :

- l'utilisation de surfaces non stigmatiques (souvent sphériques par commodité),
- les défauts de surface (polissage, contraintes mécaniques exercées par la monture),
- le champ : lorsque le stigmatisme est réalisé en un point, il n'est pas nécessairement extrapolable à tout le champ,
- l'homogénéité du milieu traversé (verre, atmosphère),
- l'alignement relatif des optiques.

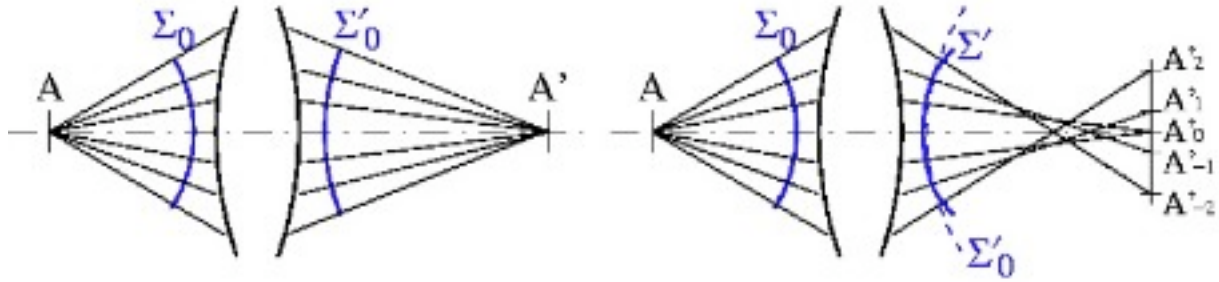


Figure 4 : Illustration de la formation de l'image d'un point avec 2 systèmes optiques : stigmatique à gauche et non stigmatique à droite.

On peut donc retenir grossièrement que *tout système optique présente des aberrations*. L'art du concepteur optique est de les minimiser, de manière à ce que l'étalement des rayons lumineux soit négligeable devant la résolution du système (fixée selon les cas par la diffraction, la taille du pixel ou le grain de la pellicule).

Quelques théorèmes pratiques pour calculer les aberrations:

- lors d'une propagation libre, l'écart aberrant  $\Delta = \Sigma'_0 - \Sigma'$  se conserve le long d'un rayon,
- lors de la traversée de plusieurs systèmes aberrants, les écarts aberrants s'ajoutent.

Dans un système bien conçu, les aberrations sont minimisées (et à peu près constantes dans le champ). La FEP est alors modifiée, mais le formalisme de la première partie reste valide (convolution, fonction de transfert). Le système est alors dit **isoplanétique**. Les aberrations sont alors exprimées dans un plan commun à tous les points du champ : la pupille. Si la FEP varie dans le champ, le système est dit **anisoplanétique**. Comme les aberrations résultent de perturbations le long du chemin parcouru par les rayons (écarts aberrants), ce n'est pas l'intensité qui est modifiée mais la phase de l'onde. On peut donc calculer la FEP en ajoutant un terme de phase dans l'intégrale de Fraunhofer. Soit  $\Phi(x,y)$  les déphasages exprimés dans la pupille traduisant les aberrations du système optique. Dans ce cas, l'amplitude du champ dans la pupille s'écrit pour une onde initialement plane incidente sur la pupille :

$$U_a(x,y) = P(x,y) \exp(i\Phi(x,y))$$

L'intensité dans le plan focal de la lentille s'écrit alors à partir de la transformée de Fourier de ce champ :

$$I(x_f, y_f) \propto \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} P(x,y) \exp(i\Phi(x,y)) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(xx_f + yy_f)\right] dx dy \right|^2 = FEP(x_f, y_f)$$

Pour simplifier les calculs, on décompose parfois l'écart aberrant  $\Delta(x,y)$  (ou la surface d'onde notée  $\Phi(x,y)$  quand exprimée en phase) sur une base de modes d'emploi simple, comme une famille de polynômes orthonormaux. Pour la plupart des systèmes à pupille circulaire, ces modes sont les polynômes de Zernike  $Z_i(x,y)$ , qui permettent d'exprimer les principales aberrations :

- $Z_0 = 1$  [piston] traduit un retard pur, non mesurable en optique (à part le piston différentiel en interférométrie)
- $Z_2 = 2x$  et  $Z_3 = 2y$  [basculements ou tip/tilt] traduisent la direction de l'onde
- $Z_4 = 3^{1/2}(2r^2 - 1)$  [défocalisation] indique la distance de focalisation
- $Z_5 = 6^{1/2}r^2 \sin 2\theta$  et  $Z_6 = 6^{1/2}r^2 \cos 2\theta$  [astigmatisme] traduisent des optiques "cylindriques" (différence de foyer entre X et Y)
- $Z_7 = 8^{1/2}(2r^3 - 2r)\sin\theta$  et  $Z_8 = 8^{1/2}(2r^3 - 2r)\cos\theta$  [comas] produisent une tache en forme d'aigrette
- $Z_9 = 8^{1/2}r^3 \sin 3\theta$  (et  $Z_{10} = 8^{1/2}r^3 \cos 3\theta$ ) [comas triples] sont plutôt d'origine mécanique

(monture à trois points de fixation)

- $Z_{11} = 5^{1/2}(6r^4 - 6r^2 + 1)$  [aberration sphérique] traduit la perte de stigmatisme sur l'axe.

Les aberrations commencent à partir de  $Z_5$  car les premiers modes ( $Z_2$  à  $Z_4$ ) correspondent en optique géométrique à la position latérale et longitudinale de la FEP. Par exemple, pour une onde sphérique convergeant à une distance  $f$ , la surface d'onde  $\Sigma'$  s'écrit (au deuxième ordre)  $z = r^2/2f$ , où  $(r, z)$  désignent les coordonnées radiale et longitudinale d'un point de  $\Sigma'$ . Ainsi, pour calculer les aberrations, on calcule l'écart aberrant  $\Delta$  entre  $\Sigma'$  et la surface d'onde sphérique parfaite  $\Sigma'_0$  (approche perturbative).

### Moyen

On dispose d'une platine de translation pour focaliser la caméra (voir Figure 5), d'une lame à faces planes et parallèles orientable sur le faisceau convergent et d'un miroir déformé sur le faisceau collimaté.

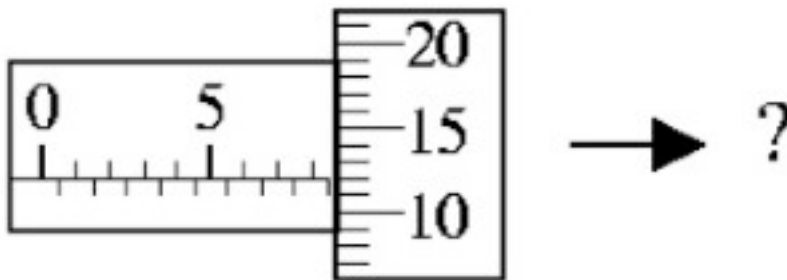


Figure 5 : lecture de la position de la caméra sur le vernier de la platine de translation

### Travail à réaliser

Revenir à un masque pupillaire circulaire unique.

- grâce à la platine de translation sous la caméra, introduire petit à petit une défocalisation de l'image. Observer la modification de l'image et l'interpréter. Trouver la position où une zone noire est observable au centre de l'image. Trouver la valeur du déphasage au bord de la pupille correspondant à cette défocalisation en utilisant la formule suivante donnant la différence de marche optique en bord de pupille pour un faisceau convergent à la distance  $f$  :  $R^2/2f$  où  $R$  est le rayon de la pupille. Commenter ces résultats par rapport à une interprétation purement de tracé de rayon (optique géométrique).
- calculer sous « idl » la fonction de transfert associée et interpréter.
- changer de masque pupillaire pour un à deux trous, qu'observez-vous ? Interprétez.

Revenir au masque circulaire unique ( $D=3\text{cm}$ ) et au meilleur point focal.

- insérer la lame fournie perpendiculairement à l'axe optique. Que se passe-t-il ? Reconnaissez-vous l'aberration introduite ? Comment la corriger ?
- faire tourner lentement la lame de verre, placée juste avant la caméra, en rattrapant le décalage du faisceau. Observer la modification de l'image et l'interpréter. Faire varier la distance de focalisation. En revenant au plan de focalisation initial, faire varier le diamètre du masque pupillaire, que constatez-vous ? Calculer des coupes  $x$  et  $y$  de la fonction de transfert associée et comparer au cas sans aberration.
- changer le masque pupillaire pour un à deux trous, qu'observez-vous ? Interprétez.

**Troisième expérimentation à réaliser**  
**Cas de l'imagerie d'un objet multi-point**

**Objectif**

L'image de l'objet est donnée par la convolution de la distribution d'intensité dans l'objet par l'image d'un point, c'est-à-dire la FEP étudiée précédemment.

$$I(x_f, y_f) = O(x_f, y_f) \otimes FEP(x_f, y_f) = \iint O(x_o, y_o) FEP(x_f - x_o, y_f - y_o) dx_o dy_o$$

Cette relation peut aussi s'écrire dans le plan de Fourier de l'image et peut alors s'interpréter comme le filtrage du spectre spatial de l'objet par la fonction de transfert optique qui n'est rien d'autre que la transformée de Fourier de la FEP.

**Moyen**

On utilise maintenant en plus une lame séparatrice devant le miroir plan pour créer un faisceau réfléchi supplémentaire ; et par rotation de la lame, on obtient au moins deux faisceaux angulairement séparés (simulant deux points sources à l'infini).

**Travail à réaliser**

Revenir à un masque pupillaire circulaire unique.

- faire un dessin expliquant qu'il s'agit bien d'une simulation de deux (ou trois ou même plus car réflexions multiples) points sources. Qu'observez-vous sur la caméra ? Expliquer comment est mise en évidence la relation de convolution sur ce cas très simple. Faire varier les caractéristiques de la FEP si nécessaire.
- faire varier l'angle de la séparatrice et donc du faisceau réfléchi en rapprochant les deux (ou trois ou...) images, mettre en évidence la limite de résolution du système par la mesure de la limite de séparation de deux images (critère de Rayleigh). En donner une formulation en fonction des paramètres du système.
- faire varier la taille du masque pupillaire et discuter de la notion de résolution plus ou moins importante d'une pupille.
- interpréter la notion de filtrage des fréquences spatiales après calcul sous « idl » des transformées de Fourier des images. Dans l'espace de Fourier, écrire la relation de formation des images pour vous aider.

**Fin du TP**



**\*\* Mémo informatique \*\***

Vous disposez de deux postes de travail:

- un PC relié à la caméra
  - une station de travail permettant des manipulations sur les images.
- Ces deux machines partagent le même espace disque, le compte "etudiant"

Mode d'emploi pour l'acquisition d'images par le PC :

- Vérifier que la caméra fonctionne bien à l'aide du moniteur vidéo que l'on pourra laisser allumé pour visualiser les réglages
- Ouvrir une fenêtre "Fichiers" sur le compte etudiant (icône sur le bureau)
- Aller dans le dossier "M2PRO-OSAE". C'est dans ce répertoire que seront écrits les fichiers: cette fenêtre permettra d'y faire du tri (création de sous-répertoires par exemple)
  
- Lancer l'interface labview (icône Measurement & Automation sur le bureau)
- Double-cliquer sur "périphériques et interfaces"
- Double-cliquer sur "NI-IMAQ-Devices"
- Double-cliquer sur "img0: IMAQ PCI-1405"
- Double-cliquer sur "Channel 0:PAL"
  
- le bouton "snap" permet de prendre une image
- le bouton "grap" permet l'acquisition continue (mode vidéo)
- le bouton "save image" permet de sauver l'image affichée à l'écran.  
=> sauver dans le format TIF uniquement pour l'exploitation sous IDL
- pour zoomer, clic sur un point de l'écran
- pour dézoomer, shift-clic.
- possibilité de changer la table de couleur : par clic droit / palette

Mode d'emploi pour l'exploitation des images sur station de travail :

- sur le terminal X, se connecter sur la machine « nitro »
- entrer le nom d'utilisateur: etudiant et son mot de passe !etudiant
- ouvrir une fenetre Xterm (icône "terminal" barre inférieure, à droite)
- taper : `cd M2PRO-OSAE`
- créer un sous-répertoire à votre nom : `mkdir <nom>`
- y aller : `cd <nom>`
- taper : `sd dota-tx39`
- lancer le logiciel de traitement IDL
- sous IDL lancer la "CALCulette à IMages" : `calcim`
- entrer le nom d'un fichier de fond qui sera soustrait à l'image
- utiliser les 4 fenêtres graphiques grâce au menu affiché, permettant de lire/sauver des images, effectuer des TF, des coupes et des vues 3D.
- les images sont recentrées automatiquement et font 256x256 pixels dans calcim.
- le nom des images sauvées est incrémental, à vous de bien noter les numéros sur le cahier de manip.