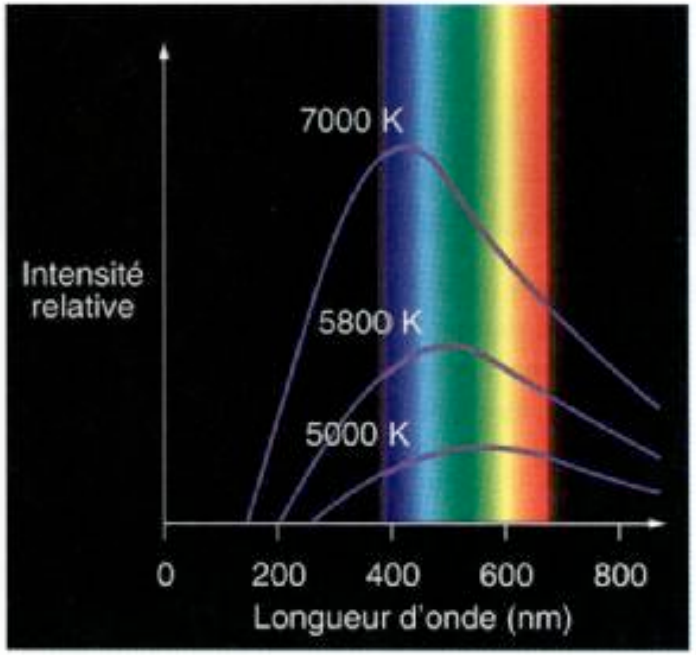
Résumé du 1er cours

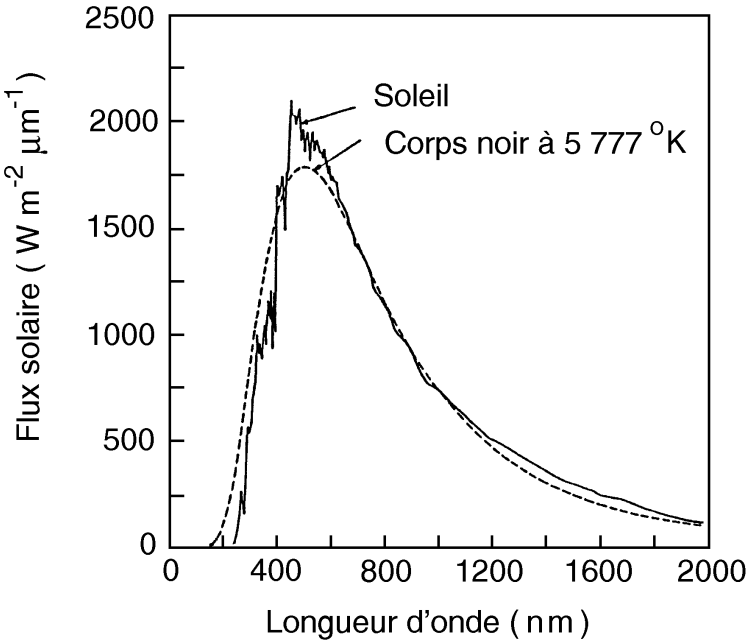
- Organisation de l'Univers: étoiles (avec ou sans planètes) + gaz galaxies amas de galaxies super amas de galaxies
- Mouvements des planètes autour du Soleil: orbites près d'un même plan («plan de l'écliptique»)
- Voie lactée : étoiles dans un «disque» aplati (= Galaxie)
- Distances: triangulation, éclat / luminosité; relation période-luminosité
- Mouvements orbitaux & gravitation: masses des astres (Soleil, planètes, étoiles …). Notre approche simplifiée: orbites circulaires, force centripète = gravitation

$$\frac{r^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

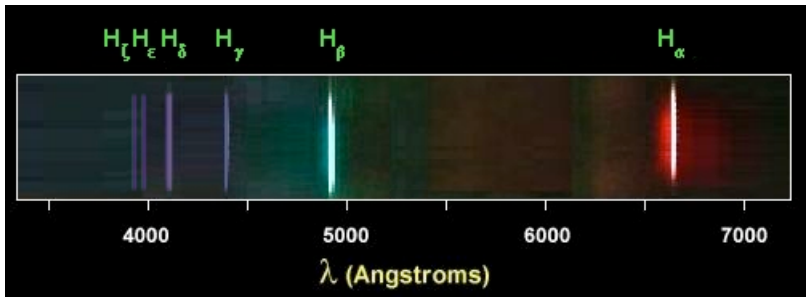
Le Soleil



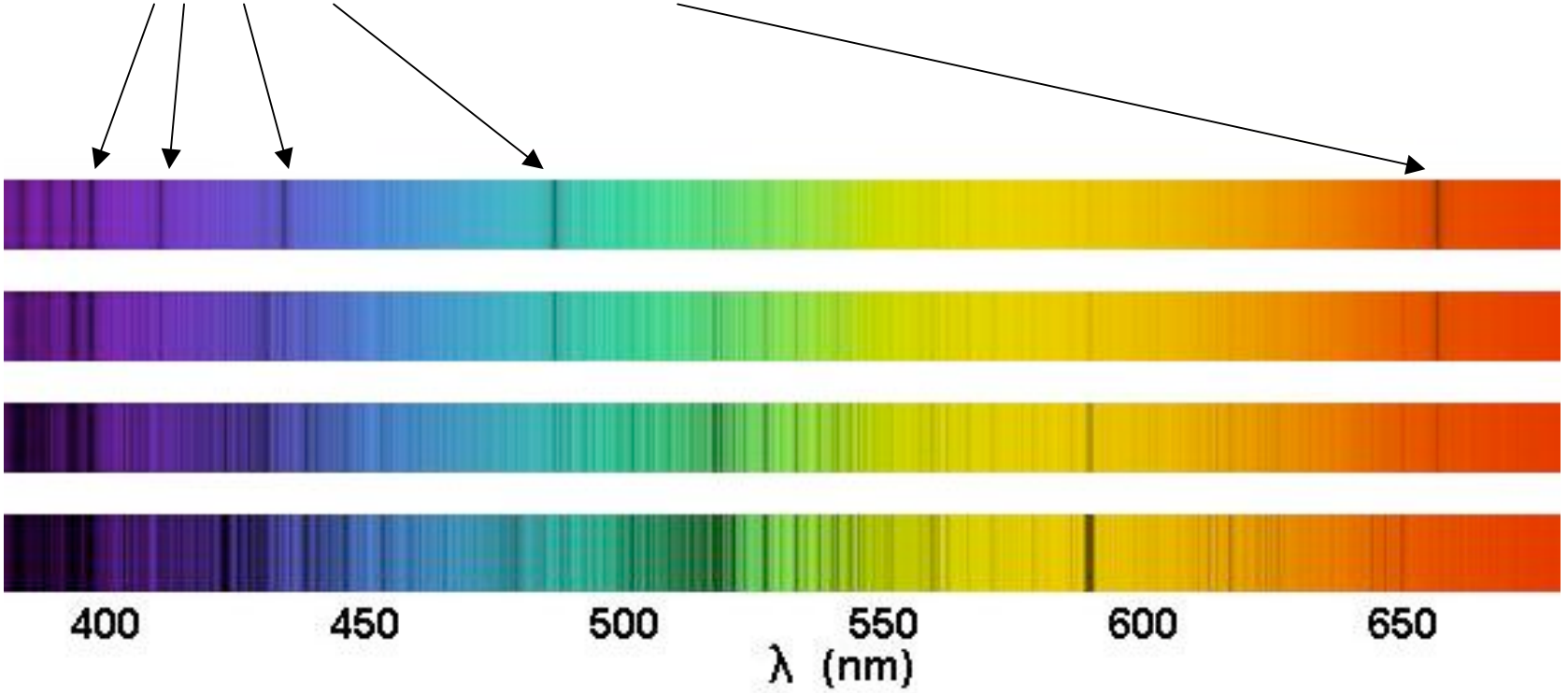
- max. du spectre dans le vert (5800 K)
- Comparaison entre le spectre observé (hors atmosphère) et la loi de Planck à 5800 K:



Spectres de raies



- H, série Balmer (émission)
- Etoiles (absorption)

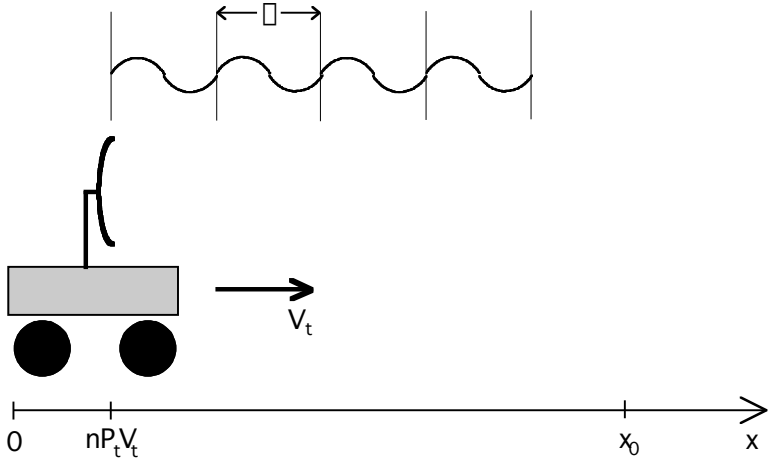


Spectroscopie

Effet Doppler-Fizeau

Effet Doppler : ondes sonores

Fréquence ou d'une onde émise par une source en mouvement: train de n ondes, durée $\Delta t = nP_t$ (réf.de la source)



Fréquence $\nu_t = 1/P_t = n/\Delta t$; $\lambda\nu = c_s$

Si source en mouvement (V_t):

- émission tête $t=0$, arrivée en x_0

$$t_1 = \frac{x_0}{c_s}$$

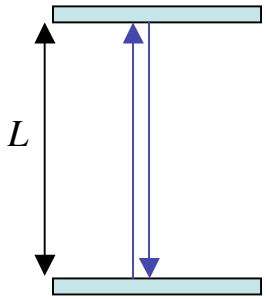
- émission queue $t=\Delta t=nP_t$, $x=V_t\Delta t$, arrivée en x_0

$$t_2 = \Delta t + \frac{x_0 - V_t\Delta t}{c_s} = t_1 + \left(1 - V_t/c_s\right)\Delta t$$

$$t_2 - t_1 = \left(1 - V_t/c_s\right)\Delta t$$

$$\nu_r = \frac{n}{t_2 - t_1} = \frac{\nu_t}{1 - V_t/c_s}$$

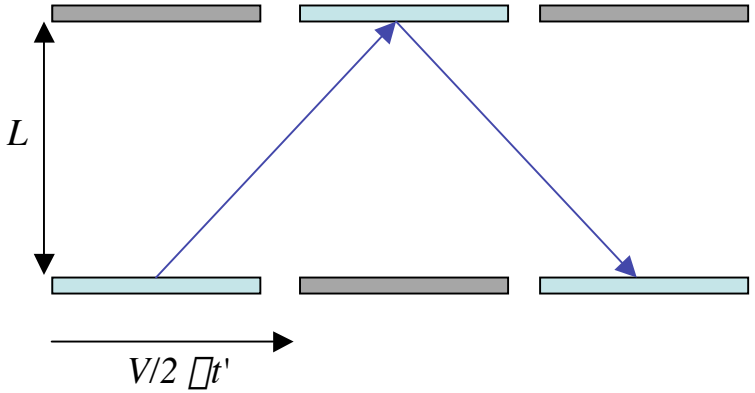
Bref rappel sur la mesure du temps dans deux référentiels en mouvement



Unité de temps = 1 aller-retour d'un faisceau lumineux entre les deux miroirs:

$$\Delta t = \frac{2L}{c}$$

Horloge en mouvement (vitesse V; c invariant) :



Distance parcourue par faisceau:

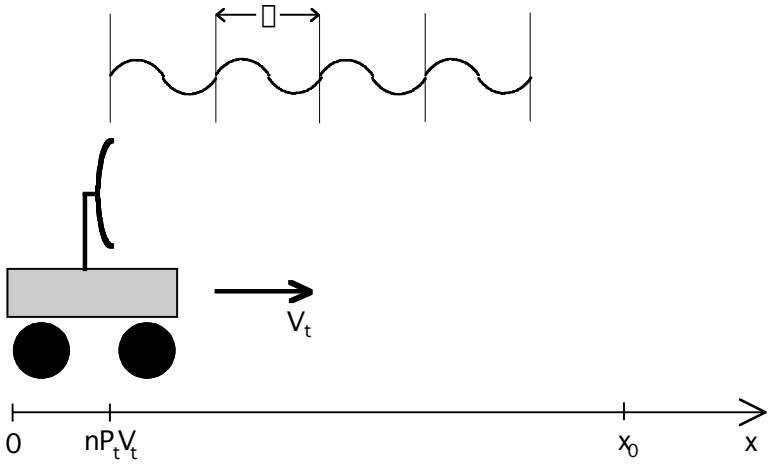
$$d = c\Delta t' = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{1}{2}V\Delta t'\right)^2}$$

$$\Delta t' = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\left(V/c\right)^2}} = \frac{2L}{c} = \Delta t$$

Durée mesurée plus grande si horloge mouvante: $\Delta t' > \Delta t$

Effet Doppler : ondes EM

Ondes EM: pas de milieu porteur, *c* invariant, dilatation des intervalles de temps



Comme pour ondes sonores: le chemin parcouru par la lumière raccourcit pendant l'émission du signal

$$\nu_r = \frac{\nu_t}{1 - V_t/c}$$

Deuxième effet (relativité): la fréquence ν_t, mesurée dans le référentiel de l'observateur, n'est pas la même que la fréquence ν_0 mesurée dans le référentiel de la source !

$$\nu_t = \frac{n}{\Delta t_t|_{obs}} = \frac{n}{\gamma \Delta t_t|_{source}} = \frac{\nu_0}{\gamma}$$

⇒ L'observateur voit

$$\nu_r = \frac{\nu_0}{\gamma\left(1 - V/c\right)} = \sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}}\,\nu_0$$

Effet Doppler en astrophysique

Résumé: la fréquence d'oscillation d'un atome, mesurée dans le référentiel de la source, apparaît décalée à un observateur qui se meut ou par rapport auquel la source se meut

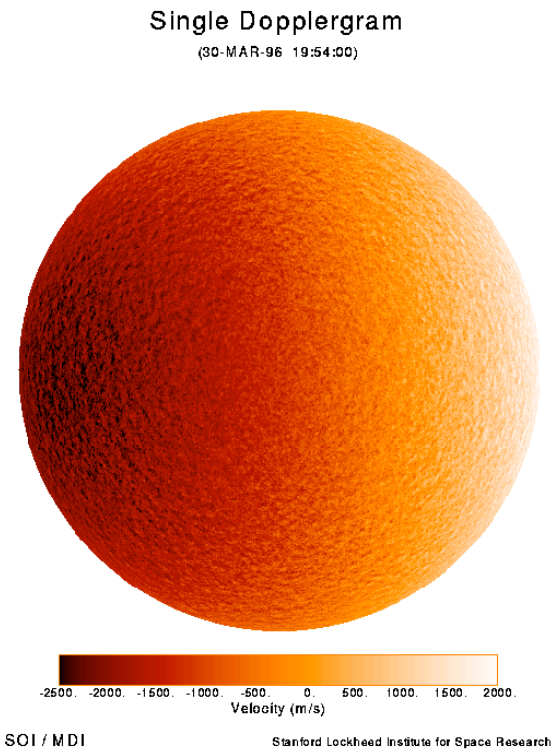
Si, contrairement à ce que nous faisions auparavant, nous désignons par V la vitesse d'*éloignement*: $\nu_r = \frac{\nu_0}{\gamma\left(1+\frac{V}{c}\right)} \approx \frac{\nu_0}{\left(1+\frac{V}{c}\right)} \approx \left(1-\frac{V}{c}\right)\nu_0$ pour $V << c$

$$\nu_r = \frac{c}{\lambda_r} \approx \left(1+\frac{V}{c}\right)\nu_0 \quad z := \frac{\lambda_r - \lambda_0}{\lambda_0} \approx \frac{V}{c}$$

V = vitesse d'éloignement dans la direction de visée !

$V>0$: $\lambda_r>\lambda_t$ décalage vers le rouge («redshift»)
$V<0$: $\lambda_r<\lambda_t$ décalage vers le bleu («blueshift»)

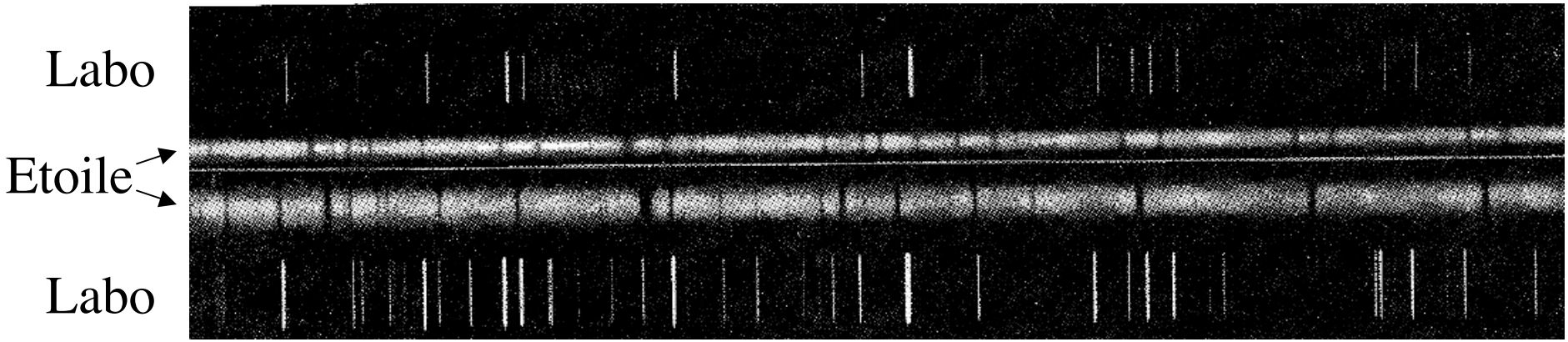
Effet Doppler observé au Soleil

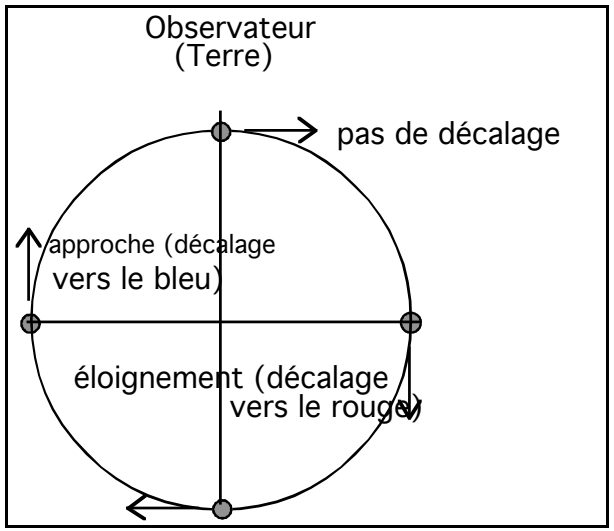


Cliché SoHO / MDI:

- Échelle couleurs: sombre (vitesse vers l'observateur) - clair (vitesse d'éloigne-ment)
- Que voit-on ?

Une étoile double révélée par la spectroscopie



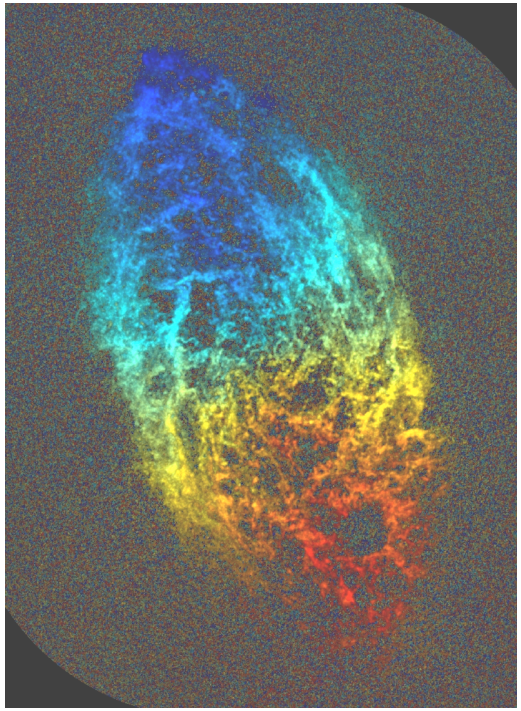


- Décalage des raies spectrales en fct. de la vitesse par rapport à l'observateur

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{V}{c}$$

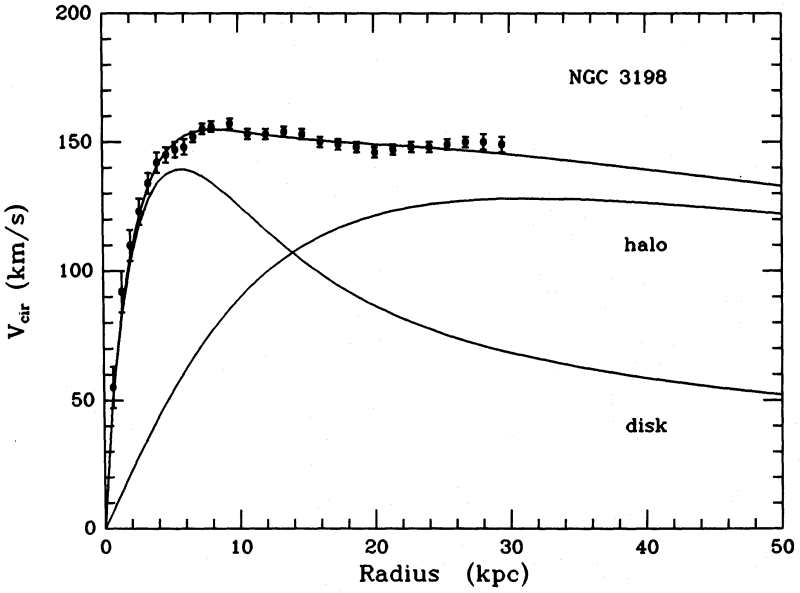
- «□inaire spectroscopique□»

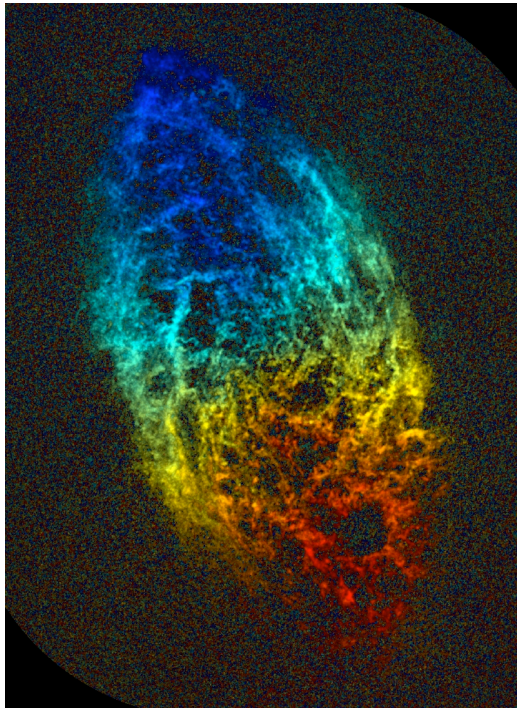
Carte Doppler d'une galaxie



- Deux cartes de la même galaxie spirale, observée en lumière visible (I ; gauche) et ondes radio, □=21 cm (raie spectrale produite par H neutre; couleurs indiquent vitesses - bleu = approche, rouge = éloignement)
- Interprétation de la carte Doppler ?

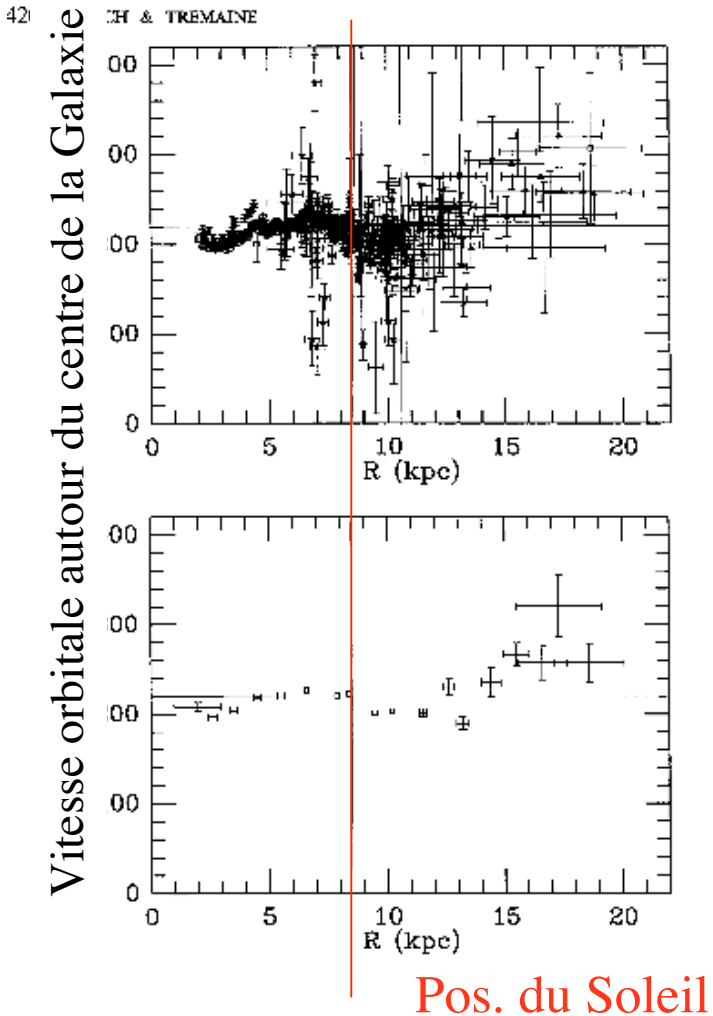
Mouvements orbitaux des étoiles dans une galaxie





- Mesure de la vitesse orbitale des astres en fonction de la distance au centre de la galaxie (van Albada et al., 1985)
- Allure générale : d'abord montée, puis niveau constant

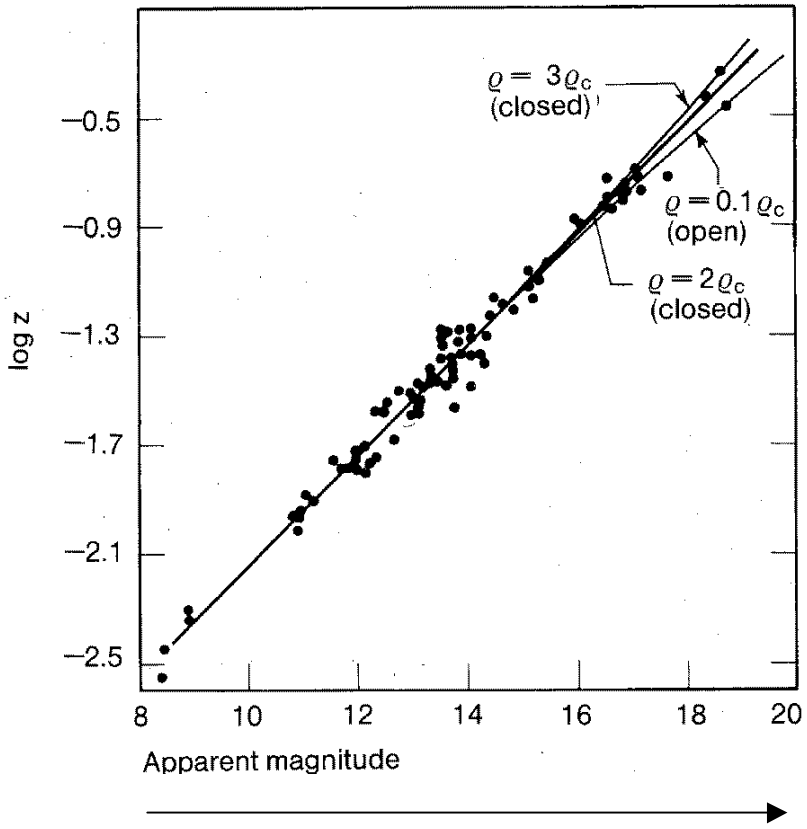
La masse de notre Galaxie (ou: combien d'étoiles notre Galaxie contient-elle ?)



- Hypothèse: la matière d'une galaxie est concentrée dans les objets brillants (étoiles, nuages de gaz)
- la vitesse d'une étoile ou nuage de gaz à la périphérie visible d'une galaxie doit être déterminée par la masse à l'intérieur de son orbite autour du centre de la galaxie
- Hypothèse: répartition sphérique de la matière
- Déterminer masse de la Galaxie contenue à l'intérieur de l'orbite du Soleil (v=220 km/s, r=8,5 kpc=2,6×10^{20} m)
- La courbe de rotation mesurée est-elle compatible avec la 3ème loi de Kepler ?

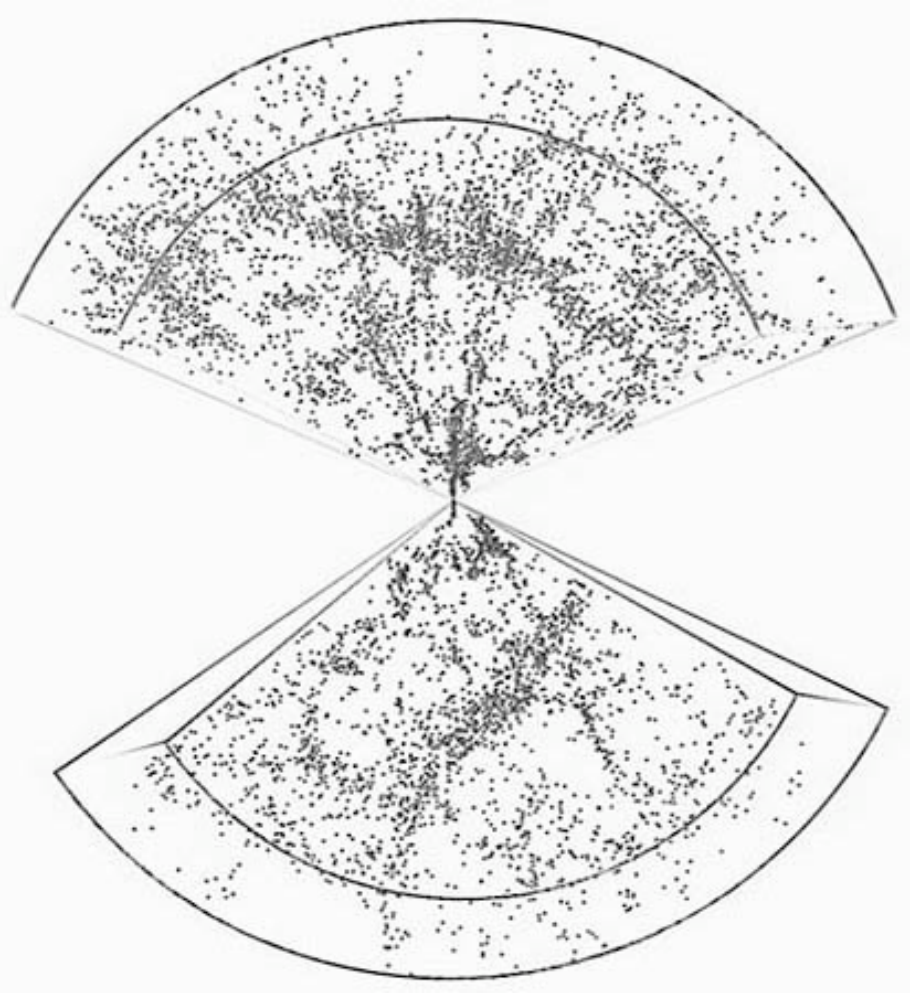
Décalage vers le rouge des spectres des galaxies

- Observation (E. Hubble): les spectres des galaxies lointaines et des amas de galaxies ont des décalages vers le rouge croissant avec la distance
- Interprétation classique (selon Newton): les galaxies s'éloignent de nous avec une vitesse qui augmente avec la distance
- Loi de Hubble: $v = H_0 r$ (H_0=60 km/s/Mpc)



Distance de la galaxie

Les galaxies proches

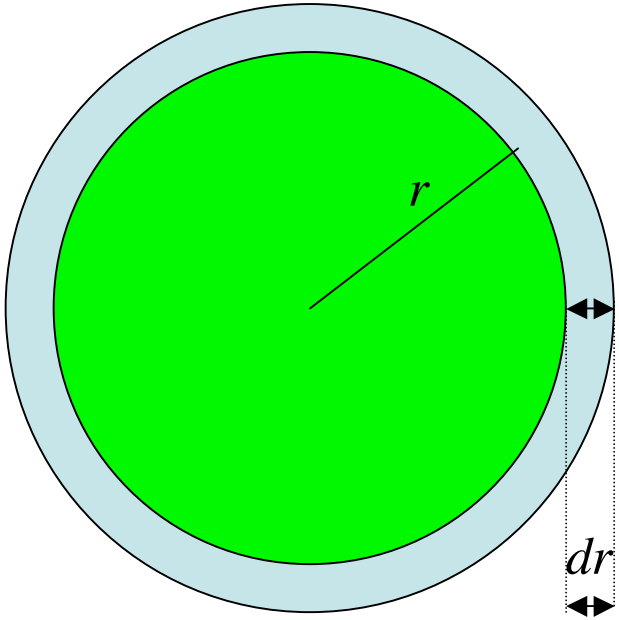


- Chaque point est une galaxie
- Observateur terrestre au centre de l'image
- Distances des galaxies déterminées par loi de Hubble, valeur max. retenue dans cette carte z=0,1 (r = ???)
- Galaxies se groupent en amas (gravitation), espace vide entre les amas

Structure d’une étoile

1) Un peu de thermodynamique

Equation de l'équilibre hydrostatique



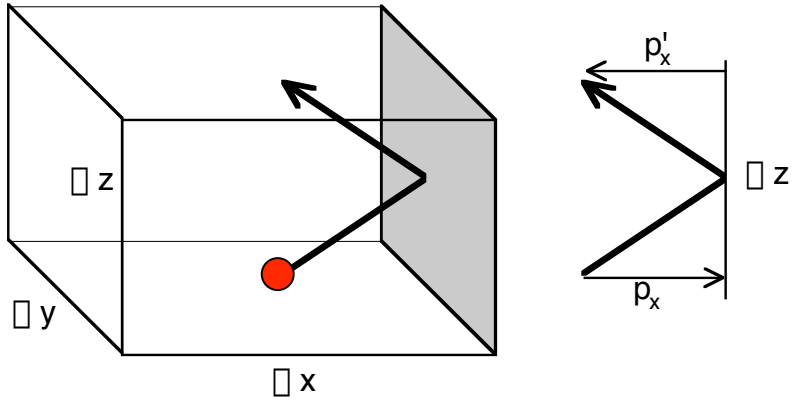
Gaz en équilibre HS : force de gravitation (intérieur) équilibrée par gradient de pression (extérieur).
Hypothèse de tous nos calculs : symétrie sphérique.

Coquille sphérique, rayon r, épaisseur dr : $dV = 4\pi r^2 dr$, $dM = \rho(r) dV$

Gravitation par masse $M(r)$ à l'intérieur : $dF = -\frac{GM(r)}{r^2} dM = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) 4\pi r^2 dr$

pression $dP = dF / 4\pi r^2$: $\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r)$

Mouvements microscopiques et pression d'un gaz parfait



Gaz = ensemble de particules microscopiques (molécules, atomes, ions, électrons …).
Collisions élastiques échange de quantité de mouvement.

1 particule transfère, lors d'une collision, qté de mvt $\Delta p_x = p_x - (-p_x) = 2p_x$

par unité de temps : $\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = 2p_x \frac{v_x}{2\Delta x} = \frac{p_x v_x}{\Delta x}$

Nombre de particules heurtant A par s = N : $N\left\langle \frac{\Delta p_x}{\Delta t} \right\rangle = N \frac{\langle p_x v_x \rangle}{\Delta x}$

 pression = force / A : $P = \frac{N}{\Delta A} \frac{\langle p_x v_x \rangle}{\Delta x} = n \langle p_x v_x \rangle$ $(n = \frac{N}{\Delta V};\ \Delta V = \Delta A \Delta x)$

1) gaz mono-atomique non-relativiste

$$P = \frac{N}{\Delta A}\frac{\langle p_x \Delta_x \rangle}{\Delta x} = n\langle p_x \Delta_x \rangle \qquad p_x = m\Delta_x \quad \Rightarrow \quad P = nm\langle \Delta_x^2 \rangle$$

$$\langle \Delta_x^2 \rangle = \langle \Delta_y^2 \rangle = \langle \Delta_z^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle \Delta^2 \rangle \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1}{3}nm\langle \Delta^2 \rangle = \frac{2}{3}e$$

(e : densité d'énergie cinétique moyenne = densité d'énergie interne)

$$e = n\left\langle \frac{m}{2}\Delta^2 \right\rangle = n\frac{3}{2}K_B T \qquad \Rightarrow \quad P = nK_B T$$

Pour un gaz parfait (= interaction des particules par collisions élastiques; cas des atmosphères stellaires et des intérieurs, tant que la densité du gaz ne dépasse pas une valeur limite).

2) gaz de particules relativistes; ici : photons

Le rayonnement exerce une pression, liée à la force de Lorentz du champ magnétique de l'onde : le **E** de l'onde met une particule chargée en mouvement, le **B** exerce la force $F_L = q \square B$ le long de **k**.

$$\mathbf{E},\mathbf{B} \quad e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \square \square t)} \quad \square \quad \square \mathbf{B} = \mathbf{k} \square \mathbf{E} \quad \square \quad B = \frac{k}{\square} E = \frac{E}{c} \quad \square \quad F_L = \frac{qE \square}{c} = \frac{1}{c}\frac{dW}{dt}$$

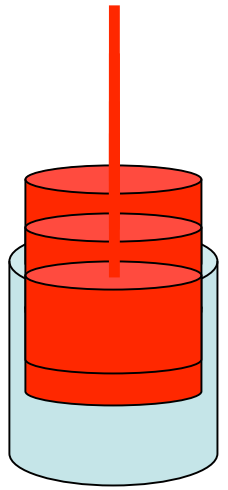
$$F_L = \frac{dp}{dt} \quad \square \quad p = \frac{W}{c}$$

$$P = \frac{N}{\square A}\frac{\langle p_x \square_x \rangle}{\square x} = n\langle p_x \square_x \rangle \qquad p = \frac{W}{c} \ , \ \square = c \ , \ \langle p_x \square_x \rangle = \frac{1}{3} p \square$$

$$\square \quad P = \frac{1}{3} nW = \frac{1}{3} e = \frac{1}{3} a_{St} T^4$$

(*e* : densité d'énergie des photons + loi de Stefan du corps noir)

Pression et augmentation de la température



Molécules du gaz (énergie interne : $U=\sum(W_{cin}+W_{pot})$)

- réalisent travail sur piston: $dW = Fdx = pAdx = pdV$
- échangent de l'énergie avec leur environnement (parois) : ΔQ

Conservation de l'énergie :

$$dU = \Delta Q - \Delta W$$

Etoile ou nuage de gaz : pas de «parois», échange d'énergie avec l'environnement (=l'Univers) par absorption ($\Delta Q > 0$) et émission ($\Delta Q < 0$) de rayonnements.

Pression et température au centre du Soleil (équilibre hydrostatique)

Simplification: sphère uniforme (ρ=cte.)

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r) = -\frac{4\pi G}{3}r\rho^2$$

$$P(R) - P(0) = \int_0^R \frac{dP}{dr}dr = -\frac{4\pi G}{3}\rho^2\int_0^R r dr = -G\frac{4\pi}{3}\frac{R^2}{2}\rho^2 = -\frac{GM\rho}{2R}$$

$$\Rightarrow \quad P(0) = \frac{GM\rho}{2R} = \frac{3}{8\pi}\frac{GM^2}{R^4}$$

Plasma électrons + protons :

$$P = n_e K_B T + n_p K_B T = 2nK_B T$$

$$\bar{\rho} = n_e m_e + n_p m_p = n\left(m_e + m_p\right) = nm_H$$

$$\Rightarrow \quad T(0) = \frac{m_H P(0)}{2K_B\bar{\rho}} = \frac{GMm_H}{4K_B R}$$

Un effet quantique : pression de dégénérescence (électrons)

La pression n'est pas nécessaire-ment liée à la température.

Relation d'incertitude : $\Delta p_x \Delta x > h$

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta p_x \to \infty$$

Estimation de la pression résultante :

$$\Delta x = \frac{1}{n_e^{1/3}} \Rightarrow p_x \approx \frac{h}{\Delta x} = h n_e^{1/3}$$

$$P = n_e \langle p_x \Delta_x \rangle = \frac{n_e}{m_e} \langle p_x^2 \rangle = \frac{h^2}{m_e} n_e^{5/3}$$

Calcul plus précis (voir poly):

$$P = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e} n_e^{5/3}$$

La pression de dégénérescence augmente au cours de la contraction d'un gaz, indépendamment de la température

Structure d’une étoile

2) La source d’énergie

Pourquoi le Soleil brille-t-il ? (1)

Combustion? Un petit exercice numérique: combien de temps le Soleil pourrait-il briller comme aujourd'hui s'il était constitué d'un combustible typique (p. ex.: essence) ?

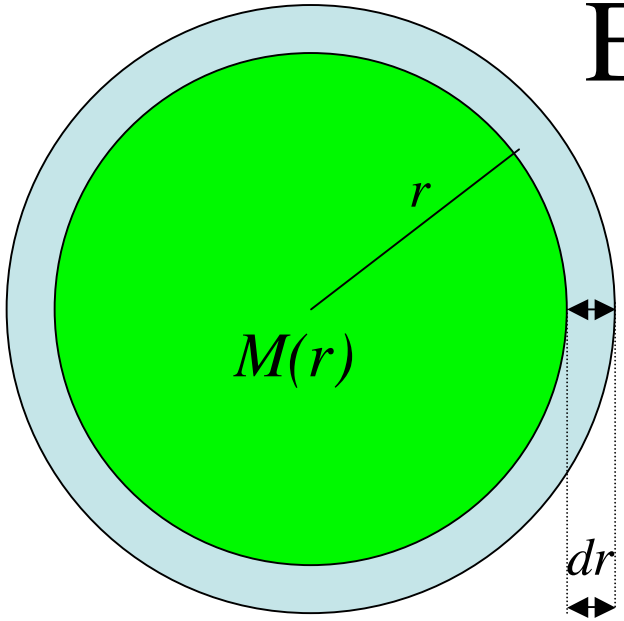
Moteur à essence, consommation 8 l / 100 km,
vitesse 100 km/h, puissance 40 kW

- 8 kg de combustible pour 1 heure

Soleil: puissance $4 \cdot 10^{26}/4 \cdot 10^{4}=10^{22}$ fois supérieure,
réservoir $2 \cdot 10^{30} /8 = 2{,}5 \cdot 10^{29}$ fois supérieur

- fonctionne $2{,}5 \cdot 10^{29} / 10^{22}$ heures = 3 000 ans
- Bien trop court ! Quelle(s) alternative(s) ???

Energie gravitationnelle



Energie potentielle de la coquille de masse dM et rayon r dans le champ de la masse $M(r)$:

$$dW_g = -\frac{GM(r)dM}{r}$$

Assemblage d'une sphère de masse $M(R)$

$\Rightarrow$ Travail réalisé sur le gaz

$$W_g = -\int_0^{M(R)} \frac{GM(r)}{r} dM$$

Sphère uniforme (ρ=cte.) :

$$M(r)dM = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho 4\pi r^2 \rho dr = 3\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \rho^2 r^5 dr$$

$$-\int_0^{M(R)} \frac{GM(r)}{r} dM = -3G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \rho^2 \int_0^R r^4 dr = -3G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \rho^2 \frac{R^5}{5} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

Durée de vie du Soleil, si son seul réservoir d'énergie était la gravitation

- Modèle de sphère homogène de H : énergie gravitationnelle (= - énergie ayant été libérée lors de l'assemblage du Soleil) : $W_g = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$
- Perte d'énergie par rayonnement : $L = 4 \times 10^{26}$ W
- Supposons que la luminosité ne change pas pendant toute sa vie :

$$\tau = \frac{W_g}{L} \approx 6 \times 10^{14} \text{ s} = 2\tau_{KH} \quad (= \text{ temps de Kelvin - Helmholtz})$$

Durée de vie d'env 10 millions d'années : insuffisante !

Energie gravitationnelle en équilibre HS

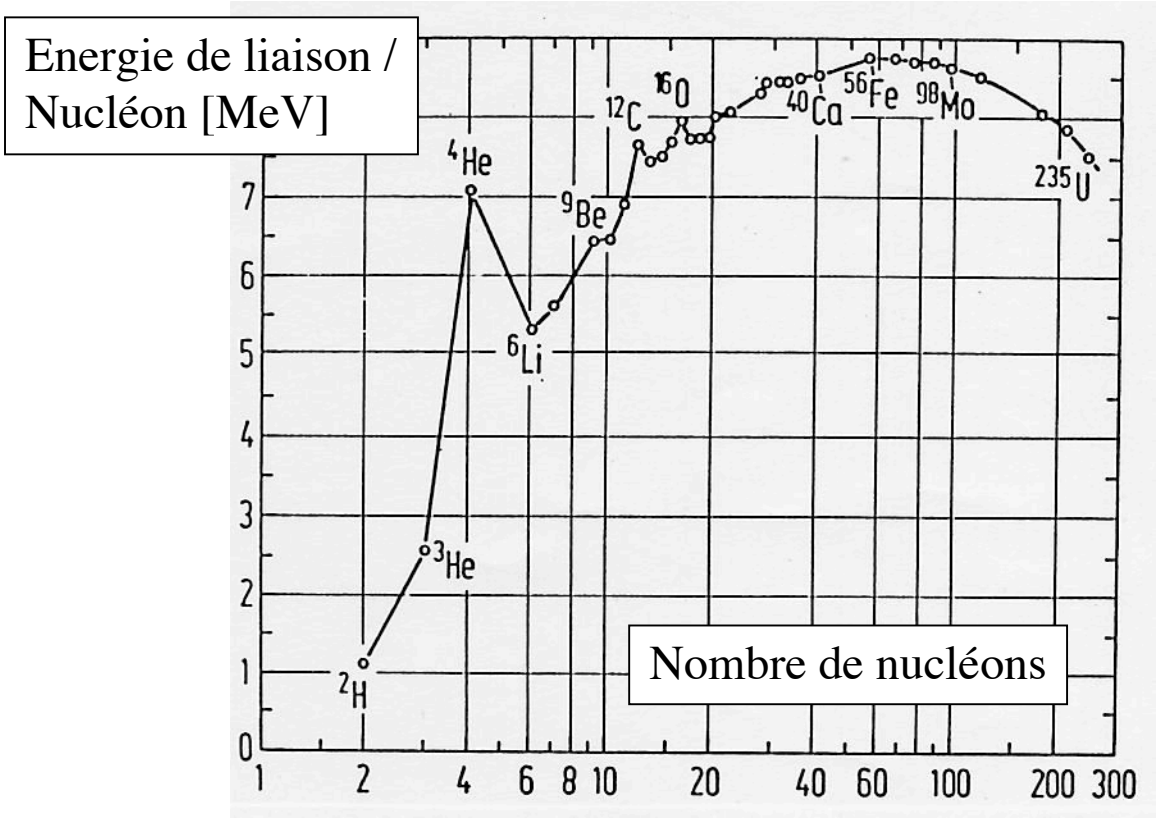
$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r)$$

$\times 4\pi r^3$: $\int_0^R \frac{GM(r)}{r^2} 4\pi r^3 \rho(r) dr = \int_0^{\frac{4\pi}{3}R^3} \frac{GM(r)}{r^2} r \rho(r) dV = \int_0^{M(R)} \frac{GM(r)}{r} dM = W_g$

$$\int_0^R \frac{dP}{dr} 4\pi r^3 dr = \left[P(r) 4\pi r^3\right]_0^R - \int_0^R 3P 4\pi r^3 dr = -3 \int_0^{\frac{4\pi}{3}R^3} P dV = -2 \int_0^{\frac{4\pi}{3}R^3} e dV = -2U$$

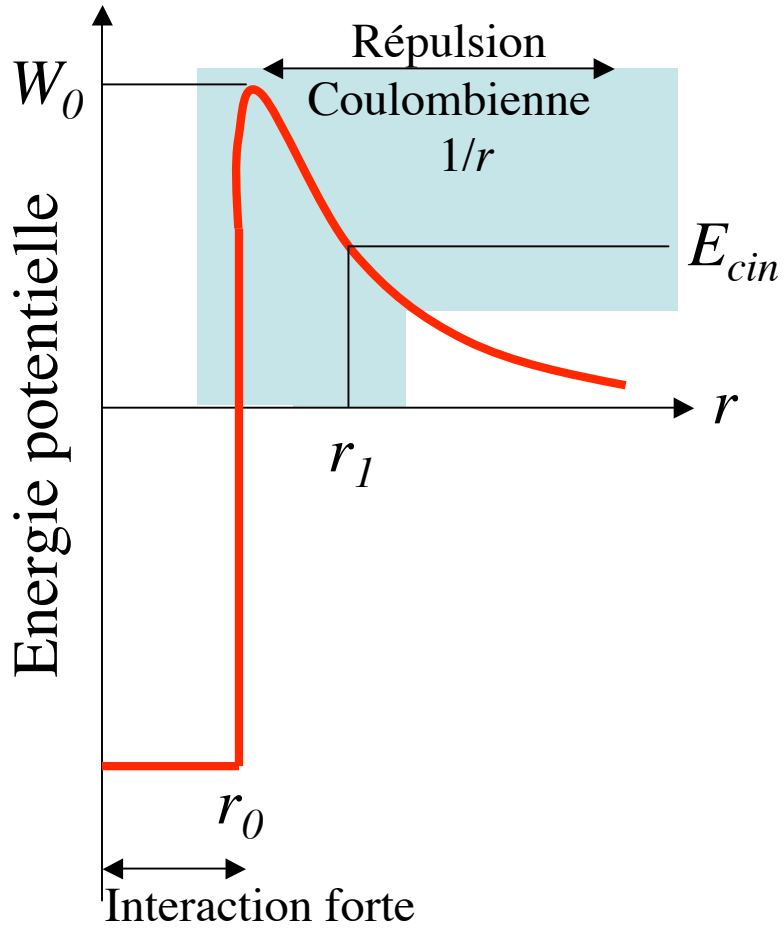
ρ en équilibre HS : $W_g = -2U$ (théorème du viriel)

Energie nucléaire



- Les noyaux les plus stables sont ceux du fer et du nickel (56 nucléons)
- Libération d'énergie nucléaire par (a) la fission d'un élément lourd (p. ex. U), (b) la fusion d'un élément léger (p. ex. H)

Barrière de Coulomb et fusion nucléaire

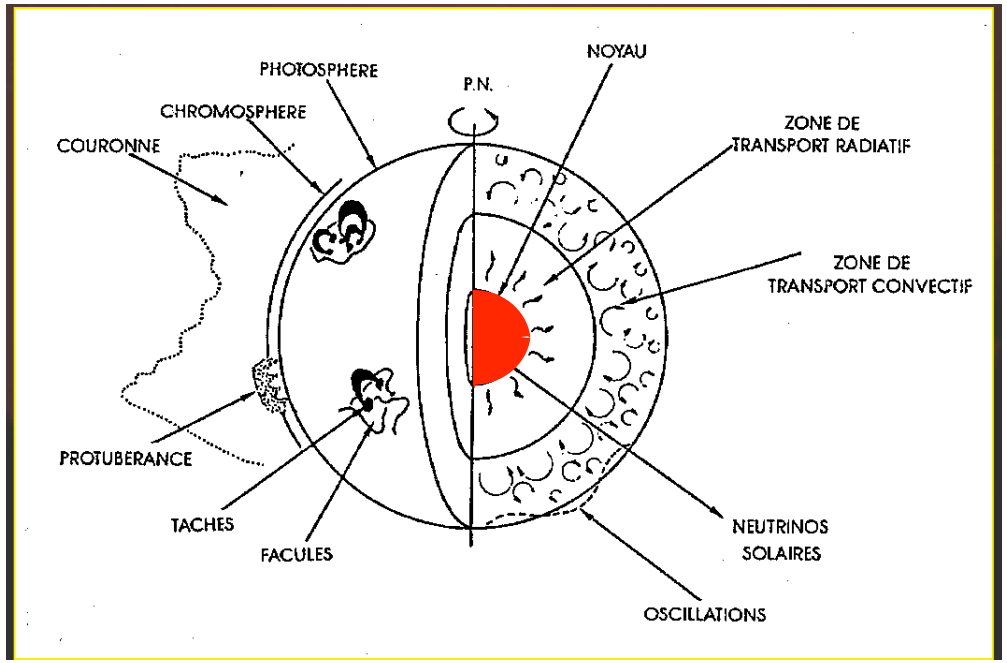


Mécanique classique: particule (q_2, $E_{cin}<W_0$) s'approche d'une particule de charge q_1 à la distance r_1 telle que

$$E_{cin} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

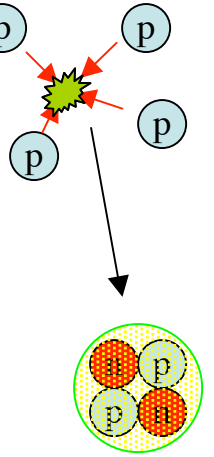
Mécanique quantique: relation d'incertitude $\Delta p \, \Delta r \geq h$

Δ probabilité finie que la particule pénètre dans puits de potentiel même si $E_{cin}<W_0$. T minimale pour H: $\Delta 10^7$ K



Fusion nucléaire au centre du Soleil :

4 noyaux d'hydrogène (protons)



1 noyau d'hélium (He)

2 p se sont transformés en neutrons (n)

Bilan des masses de cette réaction :

4 milliards de milliards de *p*: 6,690 micro-grammes
1 milliard de milliards de noyaux de He: 6,646 micro-grammes
Masse « perdue » : 0,044 micro-grammes

La masse « perdue » se retrouve sous forme d'énergie :
$E = mc^2$ = 3,97 Mega-Joule = 1,10 kWh (Einstein 1905).

La fusion nucléaire au Soleil

- Chaîne de fusions successives (Atkinson & Houtermans, Bethe, von Weizsäcker 1930-1940)
- Réaction la plus fréquente dans le Soleil:

Réaction	Energie libérée
$^{1}H + {}^{1}H \rightarrow {}^{2}H + e^{+} + \nu$	1,44 MeV
$^{2}H + {}^{1}H \rightarrow {}^{3}He + \gamma$ deux fois	5,49 MeV
$^{3}He + {}^{3}He \rightarrow {}^{4}He + 2({}^{1}H)$	12,85 MeV

Mécanisme confirmé par les mesures de la structure interne du Soleil et le comptage des neutrinos.

Energie libérée par réaction : 28 MeV, dont
env 26 MeV ($4{,}1 \cdot 10^{-12}$ J) sous forme de γ

Durée de vie du Soleil, sur son budget d'énergie nucléaire (fusion)

- Modèle de sphère homogène de H : nombre de réactions 4H->^{4}He, énergie totale dégagée ($4{,}1\times10^{-12}$ J par réaction) : $N = \frac{M_S}{4m_p} \approx 3\times10^{56}$, $W = 1{,}2\times10^{45}$ J
- Perte d'énergie par rayonnement : $L=4\times10^{26}$ W
- Supposons que la luminosité ne change pas pendant toute sa vie. Si la fraction f de la masse du Soleil est fusionnée en He, la durée de vie est

$$\tau = \frac{fW}{L} \approx 3\times10^{18} \text{ s} \approx 10^{11} f \text{ ans}$$

Résumé du 2ème cours

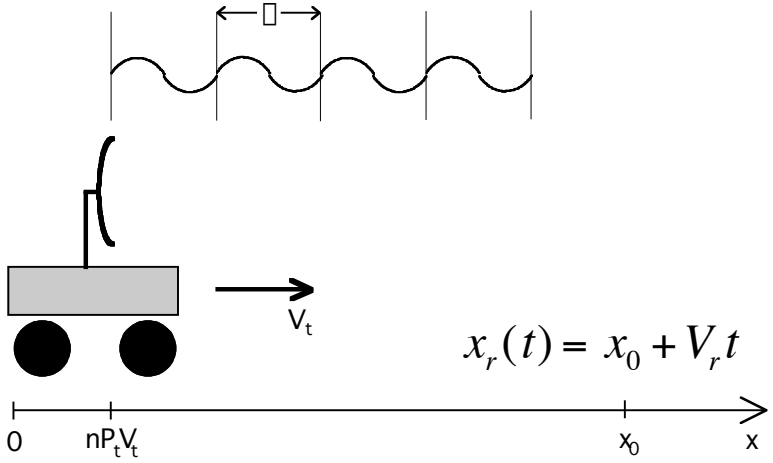
- Spectroscopie :
  - mesure T (continuum, modèle du corps noir : Stefan $e=a_{St}T^4$, Wien $\lambda_{max}T=b$)
  - mesure de la composition chimique, des champs magnétiques (Zeeman) et vitesses (Doppler) : $z=V/c$
- Mesures des vitesses : masse d'étoiles binaires, masse des galaxies
- Mise en évidence de *matière noire* (=matière non rayonnante, détectée par sa gravitation) dans les galaxies. Particules élémentaires non encore identifiées ?
- L'Univers dans son ensemble est en expansion (Hubble) : mouvement «de fuite» des galaxies mis en évidence par decalage vers le rouge. Interprétation $V=H_0 r$ pour galaxies pas trop lointaines (traitement non relativiste)
- La relation de Hubble, confirmée empiriquement, devient un nouvel outil de mesure des distances des galaxies lointaines.

Résumé du 2ème cours (suite)

- Etoiles : masses gazeuses sphériques, équilibre hydrostatique
- différents types de pression : gaz parfait, pression du rayonnement, pression de dégénérescence
- Contraction sous l'effet de la gravitation entraîne le chauffage du gaz
- Durée de vie observée du Soleil >> durée de vie sur le seul budget d'énergie gravitationnelle
- Source d'énergie : nucléaire (fusion d'éléments de faible *m* en éléments plus lourds; en particulier: 4 H $\rightarrow$ ^{4}He)

Effet Doppler : ondes sonores (2)

Mouvements de la source (V_t) et de l'observateur (V_r) par rapport au milieu porteur du son



- émission tête $t=0$, arrivée à t_1 en $x_0+V_r t_1$, parcours

$$c_s t_1 = x_0 + V_r t_1 \Rightarrow \quad t_1 = \frac{x_0}{c_s - V_r}$$

- émission queue $t=\Delta t=nP_t$, en $x_1=V_t \Delta t$, arrivée à t_2 en $x_0+V_t t_2$, distance parcourue :

$$c_s\left(t_2 - \Delta t\right) = x_0 + V_r t_2 - V_t \Delta t$$

$$t_2\left(c_s - V_r\right) = x_0 + \left(c_s - V_t\right)\Delta t$$

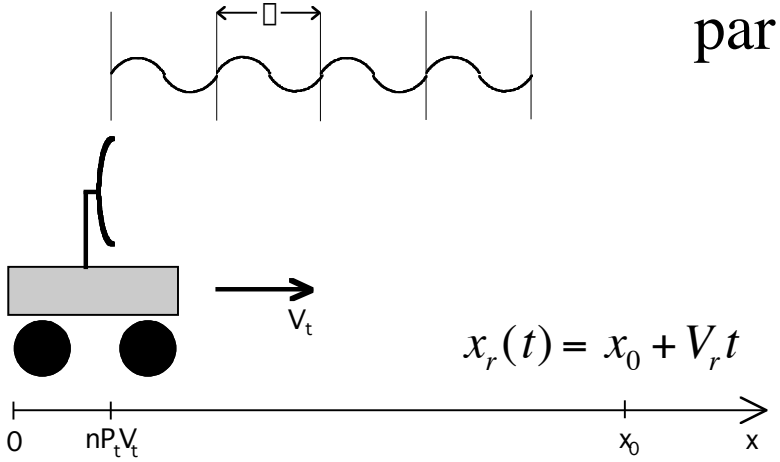
$$\Rightarrow \quad t_2 = \frac{x_0}{c_s - V_r} + \frac{c_s - V_t}{c_s - V_r}\Delta t$$

$$t_2 - t_1 = \frac{1 - V_t / c_s}{1 - V_r / c_s}\Delta t$$

$$\lambda_r = \frac{n}{t_2 - t_1} = \frac{1 - V_r / c_s}{1 - V_t / c_s}\lambda_t$$

Effet Doppler : ondes sonores (3)

Résumé: une fréquence d'oscillation, mesurée dans le référentiel de la source, apparaît décalée à un observateur qui se meut ou par rapport auquel la source se meut



Source au repos, observateur s'en éloigne ($V_t = 0,\ V_r > 0$) :

$$\nu_r = \left(1 + V_r / c_s\right) \nu_t$$

Source s'éloigne de l'observateur au repos ($V_t < 0,\ V_r = 0$) :

$$\nu_r = \frac{1}{1 + |V_t| / c_s} \nu_t \approx \left(1 - |V_t| / c_s\right) \nu_t \quad (\text{si } |V_t| << c_s)$$

$$\nu_r = \frac{c}{\lambda_r} = \left(1 + \frac{V}{c_s}\right) \frac{\lambda_t}{\lambda_t}$$

$$z := \frac{\lambda_r - \lambda_t}{\lambda_t} = \frac{V}{c_s}$$

V>0: $\lambda_r > \lambda_t$ décalage vers le rouge («redshift»)