

Mastère M1 Observatoire de Paris

Module « optique solaire » Examen 2007

L'examen comporte :

- une série de 4 exercices pour un total de 8 points (de 10H à 12H, photocopié autorisé)
- une évaluation des TD numériques sur 7 points (de 12H à 13H)
- une évaluation des TP à la Tour Solaire de Meudon sur 5 points

Début 2008, un compte rendu (volume souhaitable: quelques pages) sera à rendre aux enseignants. La première partie du compte rendu portera sur les TD numériques : vous donnerez pour chaque exercice la copie de vos programmes GDL ou IDL, accompagnée d'une figure montrant le résultat. La seconde partie portera sur la compréhension de l'optique découverte lors des expériences à la Tour Solaire : vous expliquerez le schéma optique de l'instrument, comportant télescope et spectrographe.

Exercice 1 : le télescope THEMIS

Le télescope THEMIS a été mis en service en 1999 à l'observatoire du Teide aux îles Canaries, altitude de 2370 m. Il est dédié à la spectroscopie et à la polarimétrie de l'atmosphère solaire. Il est exploité principalement par la France, l'Italie et l'Espagne.

Le miroir du télescope mesure $D = 0.9$ m de diamètre pour une focale équivalente $F = 57$ m. On demande :

- 1) le diamètre en mm de l'image du soleil au foyer du télescope (on donne le diamètre apparent du soleil sur le ciel : 32 minutes d'arc)
- 2) quelle est la dimension au foyer, en mm, d'un granule solaire, sachant que la taille des granules est de 1 seconde d'arc ?
- 3) quel est le pouvoir séparateur du télescope (ou diamètre angulaire de la tache de diffraction) en secondes d'arc à la longueur d'onde de 550 nm ?
- 4) quel flux lumineux reçoit on au foyer, en W/m^2 , sachant que le flux incident au niveau du sol est d'environ $1300 W/m^2$ (valeur appelée « constante solaire »), et qu'il n'y a aucune perte d'énergie dans le télescope ?

Exercice 2 : les spectrographes de THEMIS

Le télescope alimente un spectrographe double.

Le premier spectrographe, très peu dispersif, est appelé prédispenseur et fonctionne à l'ordre $k = 1$ avec un réseau de 150 traits/mm et un angle de blaze b de 2° . Les focales des miroirs collimateur et objectif de chambre sont égales à $f = 8$ m. En utilisant la formule des réseaux, avec un angle d'incidence i égal à l'angle de blaze b , on veut déterminer la position du spectre au foyer du spectrographe. Pour ce faire, on supposera que l'angle de diffraction i' est petit ($\sin i' \approx i'$) et on reliera la position x des raies dans le spectre à l'angle i' par la relation simple $x = f i'$.

- 1) En supposant que l'image de la pupille d'entrée du télescope, de diamètre $D = 0.9$ m, est rejetée à l'infini, le collimateur du spectrographe forme une image de cette pupille sur le réseau. Calculer son diamètre (on rappelle que la focale du télescope est $F = 57$ m).
- 2) entre quelles positions x_1 et x_2 trouve-t-on le spectre visible à l'ordre 1 de 400 à 800 nm ?
- 3) calculer à l'ordre 1 la dispersion *moyenne* du prédispenseur en mm/Å. Quelle largeur de masque faut-il choisir pour ne sélectionner qu'une bande de 10 Å dans le spectre ?
- 4) entre quelles positions x_1 et x_2 trouve-t-on le spectre visible de 400 à 800 nm dans les ordres 2 et 3 ? Constaté qu'à partir de l'ordre 2, il y a recouvrement partiel des spectres

Le second spectrographe de THEMIS est beaucoup plus dispersif. Il utilise un réseau d'angle de blaze $b = 63.5^\circ$ de 79 traits/mm et fonctionne dans des ordres d'interférence élevés. Les focales de ses miroirs collimateur et objectif de chambre restent égales à $f = 8$ m. A l'aide de la formule des réseaux :

- 5) donner les longueurs d'onde dans le blaze (c'est à dire telles que $i = i' = b$) pour les ordres 30, 40 et 50
- 6) calculer la dispersion du spectrographe en mm/Å dans les ordres 30, 40 et 50
- 7) calculer la résolution spectrale du spectrographe en mÅ, toujours dans les ordres 30, 40 et 50 lorsqu'on utilise une fente d'entrée de 0.5 seconde de largeur angulaire sur le ciel, que l'on transformera en largeur métrique (en mm) à partir du résultat de la question 2 du premier exercice

Exercice 3 : décomposition Zeeman de la raie NaI D1 5896 Å dans un champ magnétique

Le doublet du Sodium correspond aux transitions NaI 5896 Å $^2S_{1/2} \rightarrow ^2P_{1/2}$ (raie D1) et NaI 5890 Å $^2S_{1/2} \rightarrow ^2P_{3/2}$ (raie D2).

Pour la transition D1 $^2S_{1/2} \rightarrow ^2P_{1/2}$ seulement :

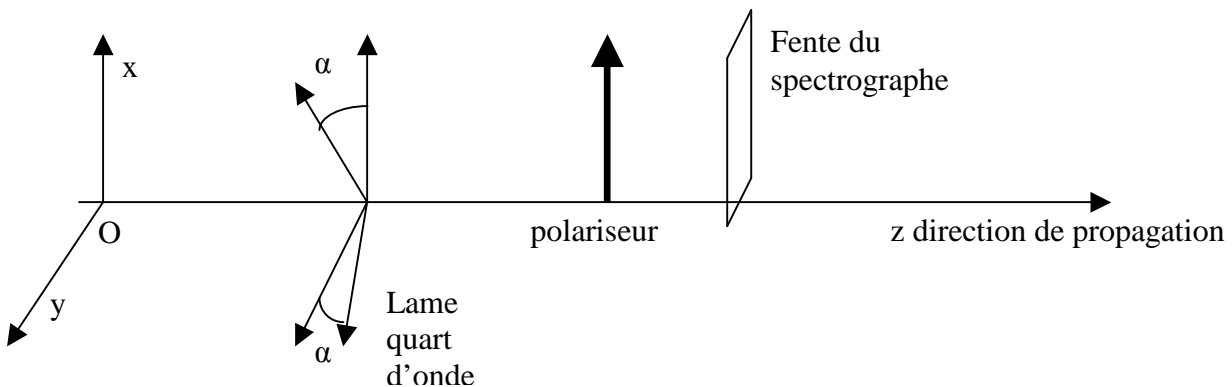
- 1) On fera un schéma (arbre) montrant les sous niveaux hauts et bas. Identifier le nombre de transitions possibles $\Delta m_J = 0, \pm 1$ entre les sous niveaux et les indiquer par des flèches ; identifier les composantes σ^- , π et σ^+
- 2) calculer le facteur de Landé des niveaux haut et bas
- 3) donner la séparation ΔE entre les sous niveaux hauts en fonction du magnéton de Bohr $\mu_B = e \hbar / 2 m$ et du champ magnétique B
- 4) donner la séparation ΔE entre les sous niveaux bas en fonction du magnéton de Bohr μ_B et du champ magnétique B
- 5) donner la variation d'énergie $\Delta E_B = E_B - E_0$ de chaque sous niveau (E_B est l'énergie de la transition en présence du champ B) par rapport à l'énergie E_0 sans champ magnétique

Nota : le facteur de Landé vaut $g = 3/2 + [S(S+1) - L(L+1)]/[2J(J+1)]$

Exercice 4 : un polarimètre pour la mesure de la polarisation circulaire

Un astronome veut mesurer la composante radiale des champs magnétiques (projection sur la ligne de visée) en utilisant la raie NaI D1 étudiée dans l'exercice 3, à partir de mesures de la polarisation circulaire de la lumière. Pour ce faire, il entreprend la construction d'un polarimètre simple. Il choisit de placer au foyer du télescope une lame quart d'onde et un polariseur, avant d'injecter la lumière dans le spectrographe selon le schéma de la page suivante.

La lame quart d'onde introduit un retard $\delta = \pi/2$ entre ses axes. Ceux ci font un angle α avec les axes Ox et Oy (on dit que la lame présente un azimuth α). Le polariseur ne laisse passer que la composante du champ électrique parallèle à l'axe Ox .



- 1) En se référant au cours, donner la matrice de Müller P_{ox} d'un polariseur d'axe Ox
- 2) Donner la matrice de Müller $T_{\alpha, \pi/2}$ d'une lame quart d'onde d'azimuth α (voir ci dessous)
- 3) En effectuant le produit de ces deux matrices, montrer que le signal que l'on injecte dans le spectrographe à la sortie du polariseur est $S = \frac{1}{2} [I + Q \cos^2 2\alpha + U \sin 2\alpha \cos 2\alpha - V \sin 2\alpha]$, où I, Q, U et V sont les paramètres de Stokes de la lumière incidente
- 4) L'observateur voudrait mesurer les paramètres de Stokes I et V et eux seuls. Il décide de faire 2 mesures séquentielles S_1 et S_2 correspondant à deux valeurs de α différentes (il fera donc tourner la lame quart d'onde entre les deux mesures). Quel couple de valeurs angulaires α peut-il sélectionner ? Montrer que la connaissance de ces deux signaux S_1 et S_2 bien choisis lui permet de mesurer aisément par somme et différence les paramètres de Stokes I et V
- 5) Malheureusement, ses réglages ne sont pas parfaits, et il estime faire une erreur de $\varepsilon = 5^\circ$ sur le positionnement angulaire (erreur sur α). En supposant qu'il observe une lumière strictement circulaire ($U = Q = 0$), que deviennent en fonction de ε , de I et de V , les deux signaux S_1 et S_2 obtenus alternativement avec $\alpha = \pi/4 - \varepsilon$ et $\alpha = \pi/4 + \varepsilon$ (on prendra ε petit pour faire un développement limité) ? Montrer que la différence des deux signaux est maintenant égale à $V (1 - 2\varepsilon^2)$. Quelle erreur relative en % fait l'observateur sur la mesure de V ?

ERRATUM (polycopié page 62)

Matrice de Müller $T_{\alpha, \delta}$ d'un retardateur δ et d'azimuth α avec l'axe Ox :

1	0	0	0
0	$\cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha)\cos(\delta)$	$\sin(4\alpha) \sin^2(\delta/2)$	$-\sin(2\alpha)\sin(\delta)$
0	$\sin(4\alpha) \sin^2(\delta/2)$	$\sin^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha)\cos(\delta)$	$\cos(2\alpha)\sin(\delta)$
0	$\sin(2\alpha)\sin(\delta)$	$-\cos(2\alpha)\sin(\delta)$	$\cos(\delta)$

Corrigé

Exercice 1 : le télescope THEMIS

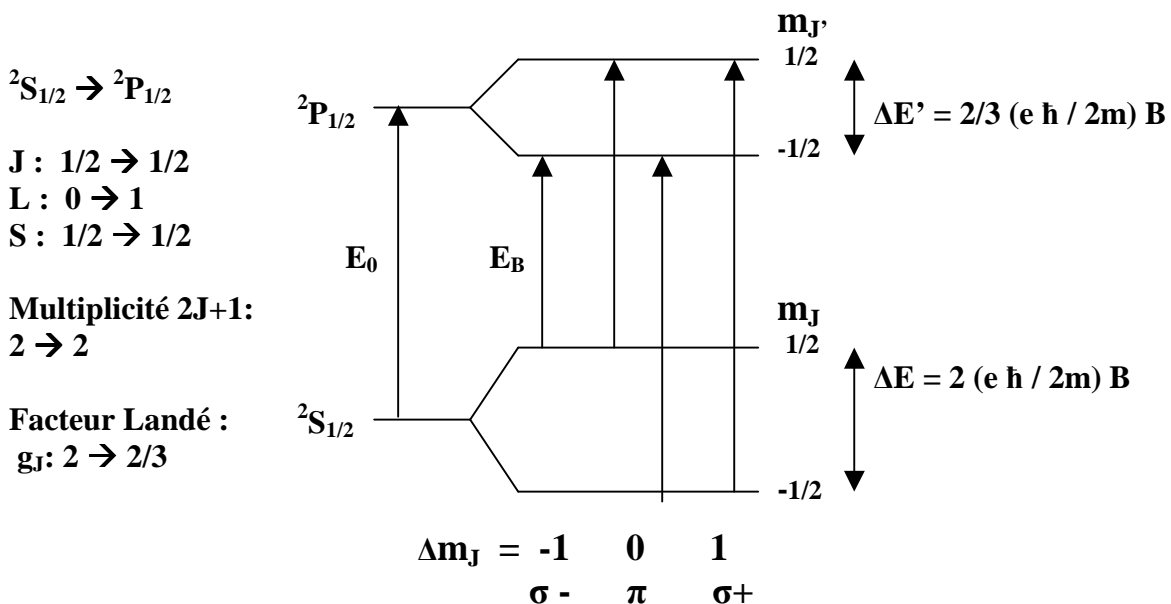
- 1) L'image solaire Φ fait 530 mm de diamètre ($\Phi = \alpha F$ avec $\alpha = 32'$, $F = 57$ m)
- 2) On a 0.28 mm par seconde d'arc puisqu'on a la correspondance entre le diamètre solaire angulaire de $32' = 1920''$ et son image de diamètre 530 mm au foyer du télescope
- 3) Diamètre angulaire de la tache de diffraction $\theta = 1.22 \lambda / D$ soit 0.15 arc sec avec $D = 0.9$ m diamètre du télescope dans le vert à $\lambda = 550$ nm
- 4) Puissance reçue par le télescope de surface 0.64 m^2 : 827 W, cette puissance se concentre sur la surface de l'image au foyer, soit sur 0.22 m^2 , ce qui donne un flux dans l'image de 3750 W/m^2

Exercice 2 : les spectrographes de THEMIS

$x_1 = f (k \lambda_1 / a - \sin b)$ et $x_2 = f (k \lambda_2 / a - \sin b)$ avec $1/a = 150$ traits/mm, $\lambda_1 = 400$ nm et $\lambda_2 = 800$ nm, $f = 8$ m, $k = 1, 2, 3$

- 1) Diamètre de l'image pupillaire sur le réseau $D * f / F = 0.13$ m ($D = 0.9$ m diamètre du télescope, $F = 57$ m focale du télescope)
- 2) Pour $k = 1$, $x_1 = 0.20$ m et $x_2 = 0.68$ m
- 3) dispersion moyenne : $(x_1 - x_2) / (\lambda_1 - \lambda_2) = 0.12 \text{ mm}/\text{Å}$. Pour ne sélectionner qu'une bande de 10 Å dans le spectre, il faut donc un masque (une fente) de 1.2 mm de large
- 4) ordre $k = 2$: $x_1 = 0.68$ m et $x_2 = 1.64$ m et ordre $k = 3$: $x_1 = 1.16$ m et $x_2 = 2.60$ m, on voit qu'à partir de l'ordre 2, il y a recouvrement partiel de la bande spectrale $400 - 800$ nm
- 5) $2 a \sin b = k \lambda$ d'où : $k = 30$: $\lambda = 7552 \text{ Å}$; $k = 40$: $\lambda = 5664 \text{ Å}$; $k = 50$: $\lambda = 4530 \text{ Å}$
- 6) $dx/d\lambda = k f / a \cos b$, d'où : $dx/d\lambda = 4.2 \text{ mm}/\text{Å}$ pour $k = 30$; $dx/d\lambda = 5.7 \text{ mm}/\text{Å}$ pour $k = 40$; $dx/d\lambda = 7.1 \text{ mm}/\text{Å}$ pour $k = 50$;
- 7) $\Delta\lambda = \Delta x a \cos b / f k$, d'où $\Delta\lambda = 32.5 \text{ mÅ}$ pour $k = 30$; $\Delta\lambda = 24.5 \text{ mÅ}$ pour $k = 40$; $\Delta\lambda = 19.5 \text{ mÅ}$ pour $k = 50$ avec $\Delta x = 0.14$ mm (soit 0.5 arc sec sur le ciel)

Exercice 3 : décomposition Zeeman de la raie NaI D1 5896 Å



Il y a donc 2 composantes π , une composante σ^- et une composante σ^+

Variation des niveaux d'énergie en présence de champ magnétique

$$\Delta E_B = E_B - E_0 = (e \hbar / 2m) B \quad (2/3 m_J - 2 m_J)$$

($\Delta E_B = E_B - E_0 =$ énergie en présence de champ – énergie en l'absence de champ)

Ce qui donne pour les 4 transitions :

$$\sigma^- \quad \Delta E_B = E_B - E_0 = -4/3 (e \hbar / 2m) B$$

facteur de Landé équivalent 4/3

$$\sigma^+ \quad \Delta E_B = E_B - E_0 = +4/3 (e \hbar / 2m) B$$

$$\pi \quad \Delta E_B = E_B - E_0 = -2/3 (e \hbar / 2m) B$$

centre de gravité des 2 composantes π

$$\pi \quad \Delta E_B = E_B - E_0 = +2/3 (e \hbar / 2m) B$$

centré sur $\Delta E_B = E_B - E_0 = 0$

Exercice 4 : un polarimètre pour la mesure de la polarisation circulaire

1) matrice de Müller P_{ox} d'un polariseur d'axe Ox

1/2	1/2	0	0
1/2	1/2	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

2) matrice de Müller $T_{\alpha, \pi/2}$ d'une lame quart d'onde d'azimuth α

1	0	0	0
0	$\cos^2(2\alpha)$	$1/2 \sin(4\alpha)$	$-\sin(2\alpha)$
0	$1/2 \sin(4\alpha)$	$\sin^2(2\alpha)$	$\cos(2\alpha)$
0	$\sin(2\alpha)$	$-\cos(2\alpha)$	0

3) $M = P_{ox} T_{\alpha, \pi/2}$: on regarde le produit de la première ligne de la matrice de Müller M par le vecteur de Stokes incident (I, Q, U, V) ce qui donne $S = 1/2 [I + Q \cos^2 2\alpha + U \sin 2\alpha \cos 2\alpha - V \sin 2\alpha]$

4) Pour $\alpha = -\pi/4$ on obtient $S_1 = 1/2 [I + V]$ et pour $\alpha = \pi/4$ on obtient $S_2 = 1/2 [I - V]$
d'où $I = S_1 + S_2$ et $V = S_1 - S_2$

5) $\varepsilon = 5^\circ$

$\alpha = -\pi/4 - \varepsilon$ avec ε petit donne $S_1 = 1/2 (I + V - 2V\varepsilon^2)$

$\alpha = \pi/4 - \varepsilon$ avec ε petit donne $S_2 = 1/2 (I - V + 2V\varepsilon^2)$

d'où $S_1 - S_2 = V (1 - 2\varepsilon^2)$

ce qui fait une erreur de 1.5 % avec $\varepsilon = 5^\circ = 0.09 \text{ rd}$