# Master M1 Observatoire de Paris

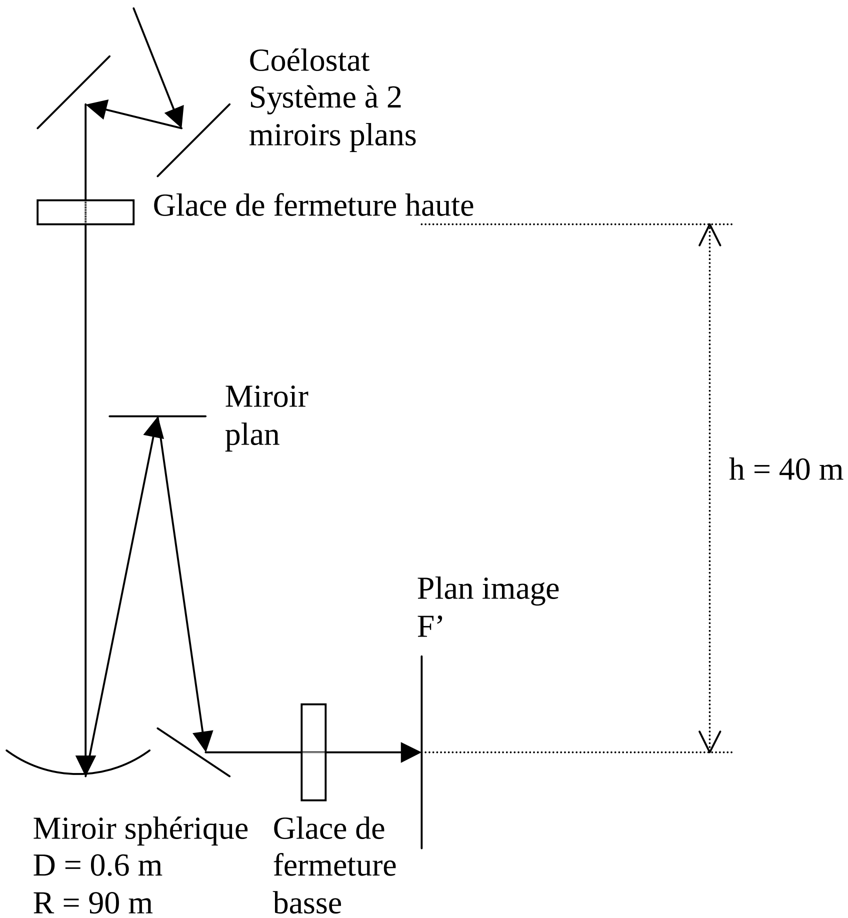
## Module « optique solaire »
## Examen 2009

L'examen comporte :

- une série de 4 exercices pour un total de 10 points (de10H à 12H, polycopié autorisé)
- une évaluation sur compte rendu des TD numériques sur 6 points
- une évaluation sur compte rendu des TP à la Tour Solaire de Meudon sur 4 points

**Exercice 1** : la Tour Solaire à vide de Ténérife

Le « Vacuum Tower Telescope » est un télescope solaire allemand construit à 2370 m d'altitude sur l'île de Ténérife. Ce télescope, conçu comme la Tour Solaire de Meudon, est pourvu d'un miroir primaire sphérique de 90 m de rayon de courbure (R), et de 60 cm de diamètre (D).




La glace de fermeture haute constitue la pupille d'entrée du télescope.
Son diamètre est : $\Phi$ = 60 cm.

1) Quelle est la distance focale F du miroir du télescope ?
2) Quel est le diamètre en mm de l'image du soleil au foyer du télescope (on donne le diamètre apparent du soleil sur le ciel : 32 minutes d'arc)

3) quelle est la dimension, en mm, d'un granule solaire au foyer du télescope, sachant que la taille des granules est de 1 seconde d'arc ?
4) quel est le pouvoir séparateur du télescope (ou diamètre angulaire de la tache de diffraction) en secondes d'arc à la longueur d'onde de 550 nm ?
5) quel flux lumineux reçoit on au foyer du télescope, en W/m$^2$, sachant que le flux incident au niveau du sol est d'environ 1000 W/m$^2$ (valeur appelée « constante solaire »), et qu'il n'y a aucune perte d'énergie dans l'instrument ?
6) la pupille d'entrée du télescope est constituée par la glace de fermeture haute, située à 40 m du miroir du télescope et de 60 cm de diamètre. En utilisant la formule de conjugaison des miroirs sphériques, où se situe l'image de cette pupille par le télescope ? Peut on considérer avec une bonne approximation qu'elle est rejetée à l'infini ?

***(réponse à la question 3 : 1'' au foyer du télescope correspond à 0.22 mm)***

<u>**Exercice 2**</u> <u>: le spectrographe</u>

Le télescope alimente un spectrographe de 15 m de distance focale dont la fente d'entrée est placée au foyer du miroir du télescope, de focale F = 45 m. Il utilise un réseau d'angle de blaze b = 62° de 79 traits/mm et fonctionne dans des ordres d'interférence élevés (30 à 55). Les distances focales de ses miroirs collimateur et objectif de chambre sont égales à f = 15 m. A l'aide de la formule des réseaux, traiter les questions suivantes :

1) L'image de la pupille d'entrée (glace de $\Phi$ = 60 cm de diamètre) est rejetée à l'infini à l'entrée du spectrographe. De ce fait, le miroir collimateur en forme une nouvelle image sur le réseau de diffraction qui se trouve situé en son foyer. Quel sera le diamètre de l'image de la pupille sur le réseau ?
2) En utilisant la formule des réseaux, donner les longueurs d'onde dans le blaze en Angströms (c'est à dire telles que i = i' = b) pour les ordres 30, 35, 40, 45, 50, 55
3) Dans quels ordres observera t'on les raies H$\alpha$ 6563 Å de l'Hydrogène et la raie NaD1 5896 Å du Sodium ?
4) il n'y a pas de spectrographe pré disperseur à l'ordre 1 pour isoler les ordres d'interférence. A la place, on utilise des filtres interférentiels étroits. En calculant les longueurs d'onde dans le blaze pour les ordres 40 et 41, quelle devra être (approximativement) la largeur en Angströms des filtres pour isoler convenablement un ordre d'interférence ?
5) calculer la dispersion du spectrographe $dx/d\lambda$ en mm/Å dans les ordres 30 et 50
6) calculer la résolution spectrale du spectrographe en milli Å, toujours dans les ordres 30 et 50, lorsqu'on utilise une fente d'entrée de 0.5 seconde de largeur angulaire sur le ciel, que l'on transformera en largeur métrique (en mm) à partir du résultat de la question 3 du premier exercice.
7) Pour transférer le spectre (images bidimensionnelles x, $\lambda$) sur le détecteur CCD, on utilise une optique de transfert, dont le but est de <u>réduire</u> la taille du spectre en l'adaptant à celle de la cible CCD. Les pixels de la caméra ont une dimension carrée de 9 microns. Avec un grandissement $\gamma$ de 0.2, quelle sera la valeur du pixel (en secondes d'arc) dans le sens spatial sur le détecteur ?
8) Quelle sera avec ce même grandissement la valeur du pixel (en Angströms) dans le sens spectral dans les ordres 30 et 50 ? Comparer aux résolutions spectrales dans les mêmes ordres obtenues à la question 6: l'échantillonnage par le capteur CCD est il optimal ?
9) Sachant que le détecteur fait 1536 pixels (direction spectrale) x 1024 pixels (direction spatiale), de quel champ d'observation spatial (en secondes d'arc) et spectral (en Angströms) disposera t-on dans les ordres 30 et 50 sur le détecteur ?

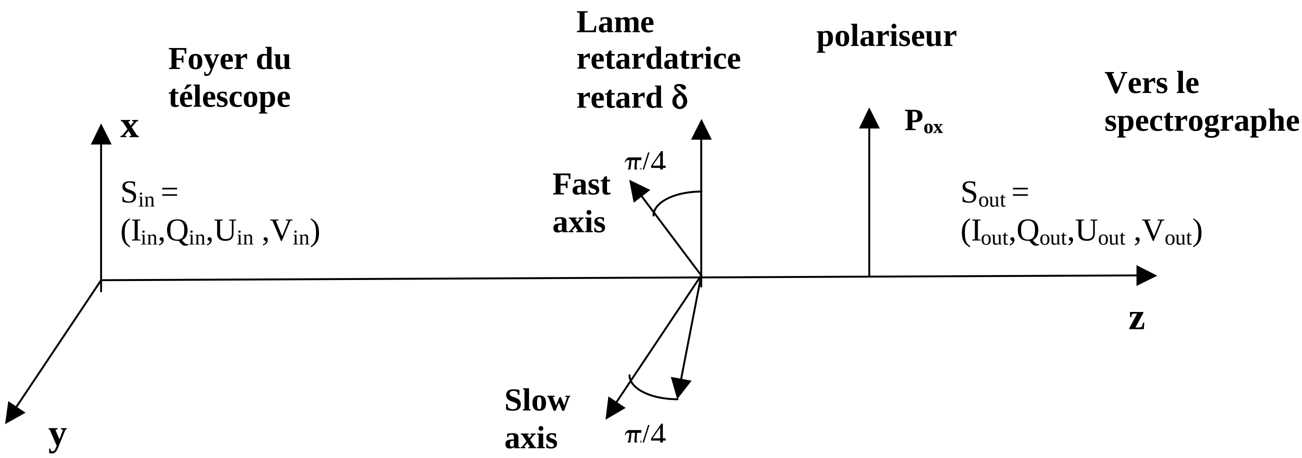
**Exercice 3** : décomposition Zeeman de la raie FeI 6337 Å dans un champ magnétique

Pour la transition $^5\mathbf{P_1} \rightarrow {}^5\mathbf{D_1}$ de la raie FeI 6337 Å:

1) On fera un schéma (arbre) montrant les sous niveaux hauts et bas. Identifier le nombre de transitions possibles $\Delta m_J = 0, \pm 1$ entre les sous niveaux hauts et bas et les indiquer par des flèches ; identifier les trois composantes σ-, π et σ+
2) calculer le facteur de Landé des niveaux haut et bas
3) donner la séparation $\Delta E$ entre les trois sous niveaux hauts en fonction du magnéton de Bohr $\mu_B = e\hbar / 2m$ et du champ magnétique B, puis entre les trois sous niveaux bas en fonction du magnéton de Bohr $\mu_B$ et du champ magnétique B
4) donner la variation d'énergie $\Delta E_B = E_B - E_0$ de chacune des sept transitions possibles, $E_B$ étant l'énergie de la transition en présence du champ magnétique et $E_0$ l'énergie sans champ magnétique
5) calculer le facteur de Landé équivalent g* puis donner $\Delta E_B$ pour les centres de gravité des trois composantes σ-, π et σ+

**Exercice 4** : le polarimètre

On veut pouvoir mesurer la polarisation circulaire de la lumière pour en déduire la valeur des champs magnétiques en projection sur la ligne de visée. Pour ce faire, on choisit de placer au foyer du télescope un retardateur variable et un polariseur, avant d'injecter la lumière dans le spectrographe selon le schéma ci dessous.




Un retardateur variable est un dispositif qui permet, par application d'un champ électrique externe à un cristal liquide biréfringent, d'introduire un retard δ choisi dans la gamme [0, 2π] entre les deux axes du cristal. Les axes du retardateur font un angle π/4 avec les axes Ox et Oy (azimuth $\alpha = \pi/4$, voir figure). Le polariseur ne laisse passer que la composante du champ électrique parallèle à l'axe Ox. La lumière progresse selon l'axe Oz de la gauche vers la droite.

1) En se référant au cours, donner la matrice de Müller $P_{ox}$ d'un polariseur d'axe Ox, la matrice de Müller $T_\delta$ d'un retardateur de retard δ, la matrice d'une rotation d'angle π/4 et la matrice d'une rotation d'angle -π/4
2) Montrer que le vecteur de Stokes sortant $S_{out}$ est relié au vecteur de Stokes incident $S_{in}$ par la relation $\mathbf{S_{out} = P_{ox}\ R_{-\pi/4}\ T_\delta\ R_{\pi/4}\ S_{in}}$.
3) Effectuer le produit matriciel $\mathbf{P_{ox}\ R_{-\pi/4}\ T_\delta\ R_{\pi/4}}$ . Montrer ensuite que le signal que l'on injecte dans le spectrographe à la sortie du polariseur est :

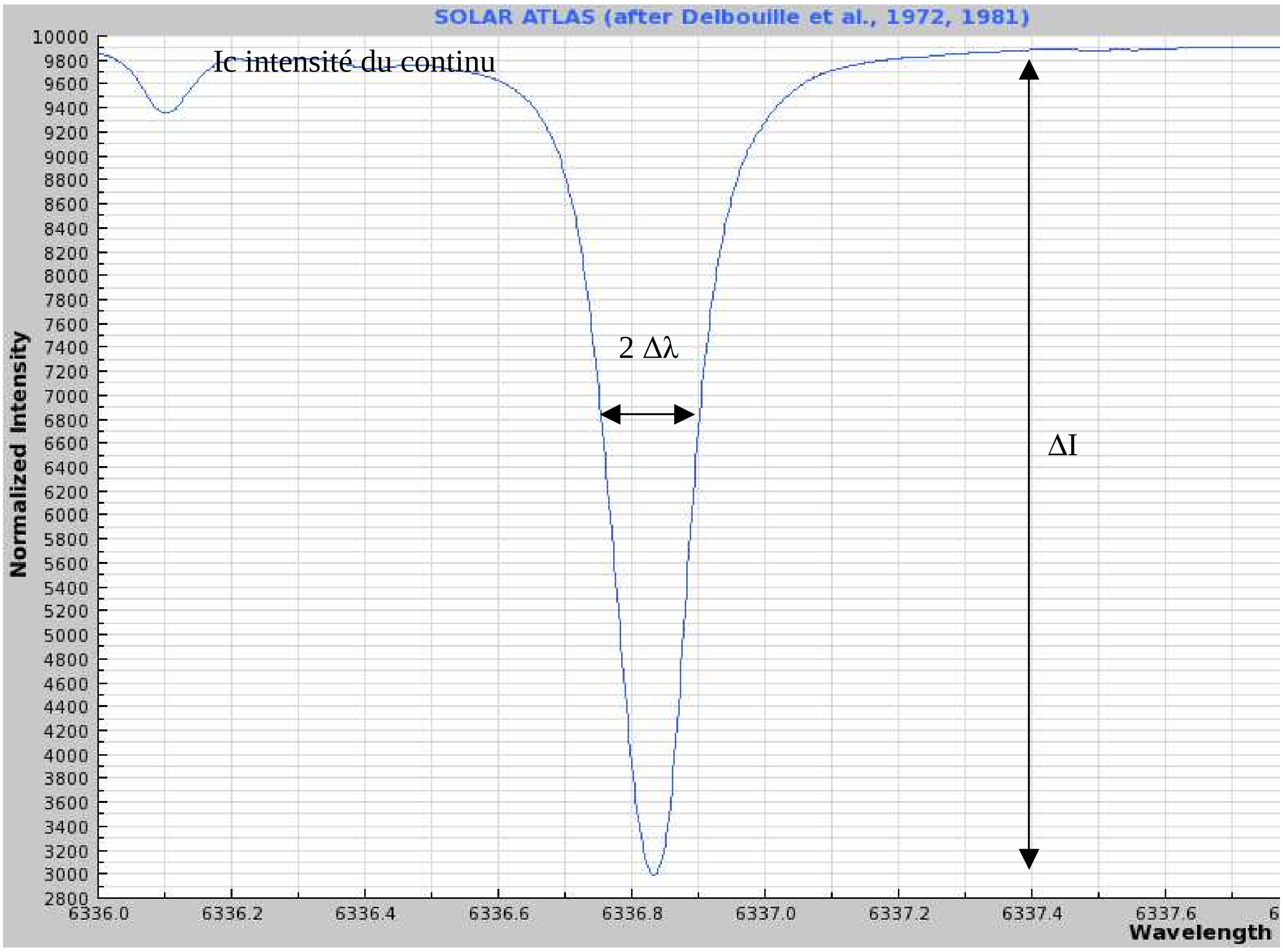
$$\mathbf{I_{out} = \tfrac{1}{2} [\ I_{in} + Q_{in}\ \cos(\delta) - V_{in} \sin(\delta)\ ]}$$

où $I_{in}$, $Q_{in}$, $U_{in}$ et $V_{in}$ sont les paramètres de Stokes de la lumière incidente (vecteur $S_{in}$)

4) L'astronome voudrait déterminer les paramètres $I_{in}$ et $V_{in}$ de la lumière incidente à partir de 2 mesures successives. Quel couple de valeurs $\delta_1$, $\delta_2$ devra t'-on choisir pour le retard ?
5) L'observateur étudie au spectrographe la raie FeI 6337 Å de l'exercice 3 en polarisation circulaire au dessus d'une tache solaire où le champ magnétique est intense. Il trouve un taux de polarisation circulaire V/I de 0.20. Sachant que le facteur de Landé équivalent g* de la raie vaut 2, en déduire la valeur du champ magnétique B// de la tache.

Rappel **:** $V/I = 4.67\ 10^{-13}\ B_{//}\ g^*\ \lambda_0^2\ [r\ e^{-1/2}/((1 - r\ e^{-1/2})\Delta\lambda)]$

où $\Delta\lambda$ est la *demi* largeur (en Å) de la raie aux points d'inflexion du profil et $r = \Delta I/Ic$ la dépression centrale (nombre compris entre 0 et 1) de la raie, que l'on mesurera sur le profil d'atlas ci dessous.



# Corrigé

**Exercice 1** : le Vacuum Tower Telescope

1) La distance focale est F = R/2 = 45 m
2) L'image solaire fait 418 mm de diamètre ($\Phi = \alpha$ f avec $\alpha$ = 32' = 9.3 mrd, F = 45 m)
3) On a 0.22 mm par seconde d'arc puisqu'on a la correspondance entre le diamètre solaire angulaire de 32' = 1920'' et son image de diamètre 418 mm au foyer du télescope
4) Diamètre angulaire de la tache de diffraction $\theta = 1.22\ \lambda / D$ soit 0.23 arc sec avec D = 0.6 m diamètre du télescope, dans le vert à $\lambda$ = 550 nm
5) Puissance reçue par le télescope de surface 0.36 $m^2$ : 282 W, cette puissance se concentre sur la surface de l'image au foyer, soit sur 0.137 $m^2$, ce qui donne un flux dans l'image de 2050 $W/m^2$ (2 fois la constante solaire environ)
6) On utilise la relation de conjugaison algébrique 1/SA + 1/SA' = 2/SC avec SA = -40 m et SC = -90 m. On en déduit SA' = 360 m. Cette distance étant grande par rapport à la focale du télescope (45 m), on peut considérer en première approximation que l'image de la pupille est rejetée à l'infini.

**Exercice 2** : le spectrographe

1) Diamètre de l'image pupillaire sur le réseau D * f / F = 20 cm (D = 0.6 m diamètre de la pupille ou glace de fermeture haute, F = 45 m focale du télescope, f = 15 m focale du collimateur)
2) La formule des réseaux donne 2 d sin b = k $\lambda$ = 223531 (avec $\lambda$ en Å), d distance entre les traits (1/79 mm), d'où :
   Pour k = 30, $\lambda$ = 7451 Å limite IR
   Pour k = 35, $\lambda$ = 6386 Å rouge
   Pour k = 40, $\lambda$ = 5588 Å vert/jaune
   Pour k = 45, $\lambda$ = 4967 Å bleu/vert
   Pour k = 50, $\lambda$ = 4470 Å bleu
   Pour k = 55, $\lambda$ = 4064 Å limite UV
3) Pour 6563 Å on est à l'ordre 34 et pour 5896 Å on a l'ordre 38
4) Pour k = 40, $\lambda$ = 5588 Å et pour k = 41, $\lambda$ = 5452 Å ; la distance de ces deux ordres successifs étant de 136 Å, un filtre interférentiel de largeur 100 Å permettra d'isoler les ordres convenablement et d'empêcher leur superposition dans le spectre
5) $dx/d\lambda$ = k f / (d cos b), d'où $dx/ d\lambda$ = 7.6 mm/Å pour k = 30 et 12.6 mm/Å pour k = 50
6) $\Delta\lambda = \Delta x$ d cos b / f k, d'où $\Delta\lambda$ = 14 mÅ pour k = 30 ; $\Delta\lambda$ = 9 mÅ pour k = 50 avec $\Delta x$ = 0.22 mm / 2 = 0.11 mm (soit 0.5 arc sec sur le ciel)
7) On a au foyer du télescope (fente d'entrée du spectrographe) 0.22 mm par seconde d'arc. On a cette même valeur dans le spectre car les focales des collimateur et objectif de chambre du spectrographe sont égales (grandissement du spectrographe = 1). Avec un grandissement de 0.2 de l'optique de transfert vers le CCD, une seconde d'arc représente 0.22 mm x 0.2 = 44 microns sur le capteur. Les pixels du détecteur ayant une taille de 9 microns, on a donc la correspondance approximative 1 pixel = 9/44 = 0.2 secondes d'arc.
8) Avec ce grandissement $\gamma$ = 0.2, les dispersions deviennent 5 fois plus petites au niveau du plan du capteur CCD : $dx/d\lambda$ = 1.5 mm/Å pour k = 30 et $dx/d\lambda$ = 2.5 mm/Å pour k = 50, ce qui donne un pixel spectral de 6.0 mÅ à l'ordre 30 et de 3.6 mÅ à l'ordre 50 (puisque 1 pixel = 9 microns = 0.009 mm). Ces valeurs sont égales à moins de la moitié des résolutions

spectrales (respectivement 14 mÅ et 9 mÅ aux ordres 30 et 50) , ce qui garantit un échantillonnage optimal (il faut un facteur 2 minimum)

9) Le champ spectral vaut 1536 x 6 mÅ = 9.2 Å environ à l'ordre 30 et 1536 x 3.6 mÅ = 5.5 Å environ à l'ordre 50.
   Le champ spatial est constamment de 1024 x 0.2'' = 205 secondes d'arc environ

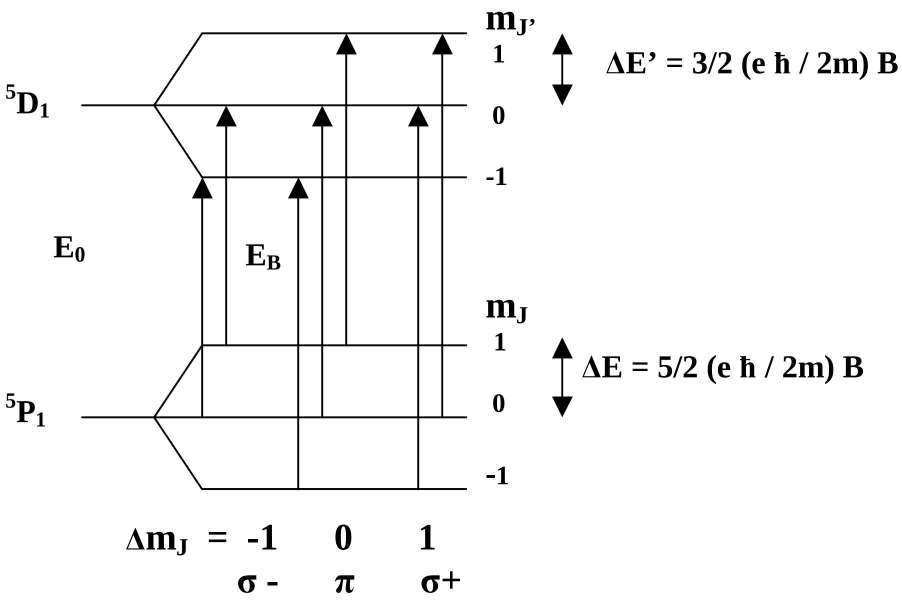
**Exercice 3** : décomposition Zeeman de la raie FeI 6122 Å

**$^5P_1 \rightarrow {}^5D_1$**

**J : 1 → 1**
**L : 1 → 2**
**S : 2 → 2**

**Multiplicité 2J+1:**
**3 → 3**

**Facteur Landé :**
**$g_J$: 5/2 → 3/2**




Il y a donc 3 composantes **π**, 2 composantes **σ -** et 2 composantes **σ +**

Variation des niveaux d'énergie en présence de champ magnétique
$\Delta E_B = E_B - E_0 = (e\ \hbar / 2m)\ B\ (3/2\ m_{J'} - 5/2\ m_J)$
($\Delta E_B = E_B - E_0$ = énergie en présence de champ – énergie en l'absence de champ)

Facteur de Landé équivalent g* = 2 permettant de situer les centres de gravité des composantes

Ce qui donne pour les 7 transitions :
**σ -** $\Delta E_B = E_B - E_0 = -\ 5/2\ (e\ \hbar / 2m)\ B,\ -\ 3/2\ (e\ \hbar / 2m)\ B$, *centre de gravité -2 (e ħ / 2m) B*
**σ +** $\Delta E_B = E_B - E_0 = 3/2\ (e\ \hbar / 2m)\ B,\ 5/2\ (e\ \hbar / 2m)\ B$, *centre de gravité 2 (e ħ / 2m) B*
**π** $\Delta E_B = E_B - E_0 = -\ (e\ \hbar / 2m)\ B,\ 0,\ (e\ \hbar / 2m)\ B$, *centre de gravité en 0*

**Exercice 4** : le polarimètre

1) matrices de Müller des éléments optiques

   matrice de Müller $P_{ox}$ d'un polariseur d'axe Ox

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1/2 | 1/2 | 0 | 0 |
| 1/2 | 1/2 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

matrice de Müller $T_\delta$ d'un retardateur $\delta$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | cos(δ) | sin(δ) |
| 0 | 0 | - sin(δ) | cos(δ) |

Rotation d'angle $\pi/4$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | - 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

Rotation d'angle $-\pi/4$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | -1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

3) produit matriciel $\mathbf{P_{ox}\ R_{-\pi/4}\ T_\delta\ R_{\pi/4}}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| ½ | ½ cos(δ) | 0 | -½ sin(δ) |
| ½ | ½ cos(δ) | 0 | -½ sin(δ) |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

D'où $\mathbf{I_{out} = ½\ [\ I_{in} + Q_{in}\ \cos(\delta) - V_{in}\ \sin(\delta)\ ]}$

4) $\delta = \pi/2$ $\quad$ $\mathbf{I_{out} = [\ I_{in} - V_{in}\ ]}$

$\delta = 3\pi/2$ $\quad$ $\mathbf{I_{out} = [\ I_{in} + V_{in}\ ]}$

Avec 2 mesures successives, il est ainsi possible de mesurer les paramètres de Stokes $I_{in}$ et $V_{in}$ par une simple combinaison linéaire

5) $V/ I = 4.67\ 10^{-13}\ B_{//}\ g^*\ \lambda_0^2\ [r\ e^{-1/2}/((1 - r\ e^{-1/2})\Delta\lambda)]$,

mesures graphiques : $r \approx 0.7$ et $2\ \Delta\lambda \approx 0.15$ Å d'où $\Delta\lambda \approx 0.075$ Å

avec $\lambda_0 \approx 6337$ Å, $g^* = 2$ et $V/I = 0.2$, on obtient $B// \approx 540$ Gauss = 0.054 T